Ejercicio nº 1. (1 punto) Racionaliza y simplifica cuando puedas:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

Ejercicio nº 2. (1 punto) Comprueba que:

$$\frac{\log 10a-\log\sqrt{100a}}{\log\sqrt[3]{a^2}}=\frac{3}{4}$$

Ejercicio nº 3. (1 punto) Obtén el desarrollo de:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$$

Ejercicio nº 4. (1 punto) Calcula el coeficiente de x^3 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^7$$

Ejercicio nº 5. (1 punto) Descomponer en factores irreducibles el polinomio:

$$x^5+4x^4-x^3-4x^2=0$$

Ejercicio nº 6. (1 punto) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=6\\ 3x-y-z&=7\\ x-y+2z&=6 \end{aligned}$$

Ejercicio nº 7. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x-3}+x=7$

b) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{5}{4}$

Ejercicio nº 8. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\ln(3x-1)=\ln 2+\ln(4x-6)$

b) $3^x+\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{79}{9}$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1. (punto)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{1+2\sqrt{5}+5+\sqrt{5}-5-1+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{4\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}$$

Ejercicio nº 2. (1 punto)

$$\frac{log\ 10a-log\ \sqrt{100a}}{log\ \sqrt[3]{a^2}}=\frac{log\ 10+log\ a-\frac{1}{2}log\ 10^2a}{log\ a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1+log\ a-\frac{1}{2}\left(2log\ 10+log\ a\right)}{\frac{2}{3}log\ a}=$$

$$=\frac{1+log\ a-\frac{1}{2}\left(2+log\ a\right)}{\frac{2}{3}log\ a}=\frac{1+log\ a-1-\frac{1}{2}log\ a}{\frac{2}{3}log\ a}=\frac{\frac{1}{2}log\ a}{\frac{2}{3}log\ a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

Ejercicio nº 3. (1 punto)

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8=x^8+8x^7\cdot\frac{1}{x}+28x^6\cdot\frac{1}{x^2}+56x^5\cdot\frac{1}{x^3}+70x^4\cdot\frac{1}{x^4}+56x^3\cdot\frac{1}{x^5}+28x^2\cdot\frac{1}{x^6}+8x\cdot\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}=$$

$$=x^8+8x^6+28x^4+56x^2+70+\cdot\frac{56}{x^2}+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}.$$

Ejercicio nº 4. (1 punto)

El coeficiente que ocupa el lugar k en el desarrollo del binomio es de la forma:

$$\left(-1\right)^{k-1}\cdot\binom{7}{k-1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{7-(k-1)}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{k-1}=\left(-1\right)^{k-1}\cdot\binom{7}{k-1}\frac{x^{8-k}}{2^{8-k}}\cdot\frac{2^{k-1}}{x^{k-1}}=\left(-1\right)^{k-1}\cdot\binom{7}{k-1}\cdot 2^{2k-9}\cdot x^{9-2k}.$$

Para que 9 – 2k = 3 → 6 = 2k → k = 3. Tenemos que hallar el término que ocupa la 3ª posición, cuyo coeficiente es:

$$\left(-1\right)^2\cdot\binom{7}{2}\cdot 2^{-3}=\frac{21}{8}$$

Ejercicio nº 5. (1 punto)

Sacamos factor común:

$x^2\ (x^3 + 4x^2 - x - 4) = 0$

La descomposición factorial del polinomio es la siguiente:

$$x^5+4x^4-x^3-4x^2=x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+4\right)=0$$

Factorizamos $x^3 + 4x^2 - x - 4$:

	1	4	−1	−4
1		1	5	4
	1	5	4	0
−1		−1	−4	
	1	4	0	

Ejercicio nº 6. (1 punto)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=7 \\ x-y+2z=6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1.^{a} \\ 2.^{a}-3\cdot 1.^{a} \\ 3.^{a}-1.^{a} \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ 7y-4z=-11 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1.^{a} \\ 2.^{a}-7\cdot 3.^{a} \\ 3.^{a} \end{array}} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ -11z=-11 \\ y+z=0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=\frac{-11}{-11}=1 \\ y=-z=-1 \\ x=6+2y-z=6-2-1=3 \end{array}\right| \text{Solución: } x=3 \text{ , } y=-1 \text{ , } z=1$$

Ejercicio nº 7. (2 puntos)

a) $\sqrt{3x-3}+x=7$ $\qquad$ $\sqrt{3x-3}=7-x$

$3x-3=(7-x)^2$ $\qquad$ $3x-3=49+x^2-14x$

$0=x^2-17x+52$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-208}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{17\pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=13 \\ x_2=4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x_1=13 \rightarrow \sqrt{36}+13=6+13=19\neq 7 \rightarrow x_1=13$ no vale

$x_2=4 \rightarrow \sqrt{9}+4=3+4=7 \rightarrow x_2=4$ sí vale

Hay una sola solución: $x=4$

b) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{5}{4}$

$$\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)}+\frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$$

$8x+8+4(x^2-3x+2)=5(x^2-1)$

$8x+8+4x^2-12x+8=5x^2-5$

$0=x^2+4x-21$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-7 \end{cases}$$

Se comprueban ambos valores y los dos son válidos. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones: $x_1=3$, $x_2=-7$

Ejercicio nº 8. (2 puntos)

a) $$ln(3x-1)=ln\,2+ln(4x-6)$$

$$ln(3x-1)=ln\left[2(4x-6)\right]$$

$$3x-1=2(4x-6) \quad \rightarrow \quad 3x-1=8x-12$$

$$11=5x \quad \rightarrow \quad x=\frac{11}{5}$$

Comprobando este valor, se ve que es válido. Por tanto, hay una única solución: $x=\frac{11}{5}$

b) Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$$y+\frac{1}{y}-\frac{1}{3}=\frac{79}{9} \quad \rightarrow \quad 9y^2+9-3y=79y$$

$$9y^2-82y+9=0$$

$$y=\frac{82\pm\sqrt{6724-324}}{18}=\frac{82\pm\sqrt{6400}}{18}=\frac{82\pm 80}{18} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y=9 \\ y=\frac{2}{18}=\frac{1}{9} \end{cases}$$

- $y=9 \quad \rightarrow \quad 3^x=9 \quad \rightarrow \quad x=2$
- $y=\frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad 3^x=\frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x=-2$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$