Ejercicio 1. *Calcular el área del triángulo formado por la recta* $2x-5y+20=0$ *y los ejes de coordenadas.*

Solución:

Calculamos la intersección de la recta con los ejes de coordenadas. La intersección con el eje OX es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y+20=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A(-10,0)$$

y la intersección con el eje OY:

$$\begin{cases} 2x-5y+20=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(4,0)$$

El área del triángulo es:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4=20$$

Ejercicio 2. *Calcular en forma explícita la ecuación de la recta que pasa por el punto* $A(3,-1)$ *y por el punto de intersección de las rectas* $2x-y+5=0$ *e* $y=5x+2$.

Solución:

Calculamos el punto de intersección de las dos rectas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ y=5x+2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(1,7)$$

Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,-1)$ y $B(1,7)$. La pendiente es:

$$m_{AB}=\frac{7-(-1)}{1-3}=-4$$

La ecuación en forma punto-pendiente es:

$$y+1=-4\,(x-3)$$

Despejando y se obtiene la forma explícita:

$$y=-4x+11$$

Ejercicio 3. *Hallar la ecuación de una recta que corta a los ejes en segmentos de longitud igual y que pasa por el punto* $P(6,8)$.

Solución:

- ◇ Una manera de resolver el problema es utilizar la forma segmentaria de la recta:

  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

  donde a y b son respectivamente la abscisa y la ordenada en el origen. Puesto que estos números deben ser iguales en valor absoluto, la ecuación de la recta debe tener la forma

  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

Como la recta debe pasar por el punto $P(6,8)$ se verifica:

$$\frac{6}{a}+\frac{8}{a}=1 \quad\Longrightarrow\quad a=14 \quad \text{o bien} \quad \frac{6}{a}-\frac{8}{a}=1 \quad\Longrightarrow\quad a=-2$$

Así pues, las dos soluciones son:

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{14}=1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$$

◇ Otra posibilidad es tener en cuenta que las rectas que determinan segmentos de longitud igual son las que tienen pendiente 1 o -1 (las que forman ángulos de 45º o 135º con el eje de abscisas). Las dos rectas son:

$$y-8=1\,(x-6) \qquad \text{y} \qquad y-8=-1\,(x-6)$$

◇ Otra posibilidad es utilizar la forma punto-pendiente de la recta. Puesto que debe pasar por el punto $P(6,8)$, a falta de determinar la pendiente, la ecuación de la recta es:

$$y-8=m\,(x-6)$$

La abscisa en el origen de esta recta es

$$\begin{cases} y-8=m\,(x-6) \\ y=0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad a=6-\frac{8}{m}$$

y la ordenada en el origen:

$$\begin{cases} y-8=m\,(x-6) \\ x=0 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad b=8-6m$$

Estos dos números deben ser iguales en valor absoluto:

$$\left|6-\frac{8}{m}\right|=|8-6m| \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 6-\frac{8}{m}=8-6m \quad\Longrightarrow\quad 6m^2-2m-8=0 \\ 6-\frac{8}{m}=-8+6m \quad\Longrightarrow\quad 6m^2-14m+8=0 \end{cases}$$

La primera ecuación tiene como soluciones $\frac{4}{3}$ y -1. La segunda ecuación se verifica para $\frac{4}{3}$ 1. Así pues tenemos tres soluciones:

$$y-8=-1\,(x-6) \qquad y-8=1\,(x-6) \qquad y-8=\frac{4}{3}\,(x-6)$$

Puede comprobarse que la última solución, que no habíamos encontrado anteriormente, es una recta que pasa por el origen y que, por lo tanto, determina con los ejes segmentos de longitud cero.

Ejercicio 4. *Dados los puntos $A(2,2)$ y $B(5,-2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.*

Solución:

Puesto que el punto P está en el eje de abscisas su ordenada es igual a cero. Sea $P(x,0)$. Entonces:

$$m_{AP}=\frac{0-2}{x-2}=\frac{-2}{x-2}$$
$$m_{BP}=\frac{0-(-2)}{x-5}=\frac{2}{x-5}$$

Estas dos pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad $1+m_1m_2=0$. Por consiguiente

$$1+\frac{-2}{x-2}\cdot\frac{2}{x-5}=0; \qquad (x-2)(x-5)-4=0; \qquad x^2-7x+6=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

Tenemos dos soluciones $P_1(1,0)$ y $P_2(6,0)$.

Ejercicio 5. *Los puntos $A(3,2)$, $B(4,1)$ y $C(-3,5)$ son vértices de un triángulo. Comprobar que la recta que pasa por los puntos medios de AB y AC es paralela al lado BC.*

Solución:

La recta BC tiene de pendiente:

$$m_{BC} = \frac{5-1}{-3-4} = -\frac{4}{7}$$

Los puntos medios de AB y AC son los puntos $M\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $N\left(0,\frac{7}{2}\right)$. La pendiente de la recta MN es:

$$m_{MN} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{0-\frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{4}{7}$$

Las dos pendientes coinciden. Por tanto las dos rectas son paralelas.

Ejercicio 6. *Calcular la distancia entre las rectas paralelas $x+2y+4=0$ y $2x+4y-1=0$.*

Solución:

- Basta obtener un punto de una recta y calcular la distancia a la otra. Por ejemoplo, un punto de la primera recta es $P(0,-2$. Su distancia a la segunda recta es:

$$d = \left|\frac{2\cdot 0+4\cdot(-2)-1}{\sqrt{4+16}}\right| = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

- También pueden escribirse las dos rectas con los mismos coeficientes de x e y:

$$\begin{aligned}&2x+4y+8=0\\&2x+4y-1=0\end{aligned}$$

  y aplicar la fórmula:

$$d = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{8-(-1)}{\sqrt{4+16}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$$

Ejercicio 7. *Dadas las rectas $3x+y-1=0$, $2x+ky-8=0$, determinar k para que formen un ángulo de $45°$.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1=-3$ y la segunda $m_2=\frac{-2}{k}$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos rectas:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \quad\Longrightarrow\quad 1 = \left|\frac{-3+\frac{2}{k}}{1+\frac{6}{k}}\right| = \left|\frac{2-3k}{6+k}\right|$$

Tenemos dos soluciones:

$$\begin{aligned}&\frac{2-3k}{6+k}=1 \quad\Longrightarrow\quad 6+k=2-3k \quad\Longrightarrow\quad k=-1\\&\frac{2-3k}{6+k}=-1 \quad\Longrightarrow\quad -6-k=2-3k \quad\Longrightarrow\quad k=4\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Hallar un punto de la recta $y = x+3$ equidistante de la recta $3x-4y+3 = 0$ y del eje OX.*

Solución:

Los puntos que equidistan de dos rectas se encuentran en sus bisectrices. Las ecuaciones de estas bisectrices son:

$$\left|\frac{3x-4y+3}{\sqrt{9+16}}\right| = |y| \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 3x-4y+3 = 5y \\ 3x-4y+3 = -5y \end{cases}$$

Así pues, las bisectrices son $x-3y+1 = 0$, y $3x+y+3 = 0$.

El punto que buscamos se encuentra en la recta dada $y = x+3$ y en uno u otra bisectriz. Las soluciones se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} x-3y+1 = 0 \\ y = x+3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3x+y+3 = 0 \\ y = x+3 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos $P(-4,-1)$ y $Q\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

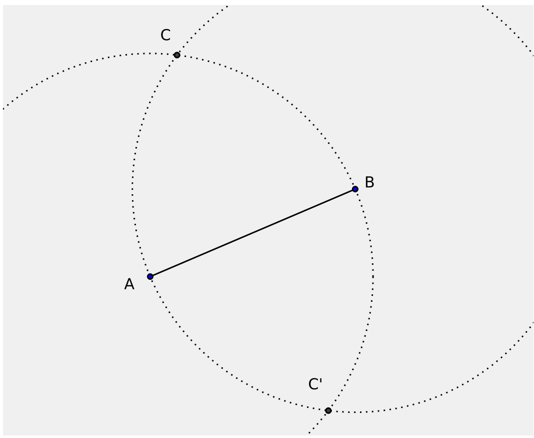
Ejercicio 9. *Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(-3,1)$ y $B(5,2)$. Calcular el tercer vértice.*

Solución:

El lado del triángulo mide

$$l^2 = (5-(-13))^2 + (2-1)^2 = 64+1 = 65$$

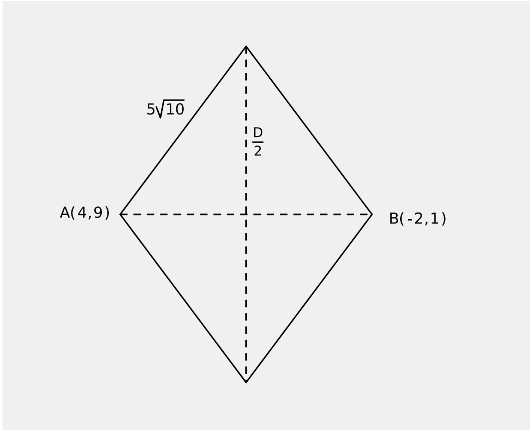
El tercer vértice es la intersección de la circunferencia de centro en A y que pasa por B, con la circunferencia con centro en B y que pasa por A. También podría obtenerse como la intersección de la mediatriz de AB con cualquiera de estas dos circunferencias. Entonces, el tercer vértice es la solución del sistema



$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 65 \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 = 65 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos

$$C\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-8\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \qquad C'\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+8\sqrt{3}}{2}\right)$$



Ejercicio 10. *El lado de un rombo mide* $5\sqrt{10}$ *y dos vértices opuestos son los puntos* $A(4,9)$ *y* $B(-2,1)$. *Calcular el área del rombo.*

Solución:

Una de las diagonales mide:

$$d = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

La otra diagonal puede obtenerse por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{D}{2} = \sqrt{250-25} = 15 \quad \Longrightarrow \quad D = 30$$

El área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{30 \cdot 10}{2} = 150$$