

**Ejercicio 1** Calcular la derivada de la función  $y = \sqrt{x}$  a partir de la definición. Calcular la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 4.

**Solución:**

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

La ordenada en el punto de abscisa  $x_0 = 4$  es  $y_0 = \sqrt{4} = 2$ .

La pendiente en ese punto es la derivada para  $x = 4$ :

$$m = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

De modo que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

**Ejercicio 2** Derivar las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

1.  $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 7}$

2.  $y = \frac{3}{x^2}$

3.  $y = \frac{4x - 1}{(x - 3)^2}$

4.  $y = \frac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$

**Solución:**

$$y = \sqrt{3x^2 - 2x + 7} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 7}} (6x - 2)$$

$$y = \frac{3}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{0 - 2x \cdot 3}{x^4}$$

$$y = \frac{4x - 1}{(x - 3)^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4 \cdot (x - 3)^2 - 2(x - 3)(4x - 1)}{(x - 3)^4}$$

$$y = \frac{e^x}{x \operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^x \cdot x \operatorname{sen} x - (1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x)e^x}{(x \operatorname{sen} x)^2}$$

**Ejercicio 3** Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = x^3 - 3x$  que sean paralelas a la recta  $y = 6x + 10$ .

**Solución:**

Nos piden las ecuaciones de las tangentes a la curva que tienen pendiente igual a 6. Puesto que la pendiente de la tangente es la derivada, la derivada en los puntos de tangencia debe ser igual a 6:

$$y' = 3x^2 - 3 = 6 \implies 3x^2 = 9 \implies x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

Las ordenadas de estos puntos se encuentran sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva:

$$x_1 = \sqrt{3} \implies y_1 = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 0$$

$$x_2 = -\sqrt{3} \implies y_2 = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) = 0$$

Ya tenemos los puntos de tangencia y la pendiente. Las ecuaciones de las tangentes son:

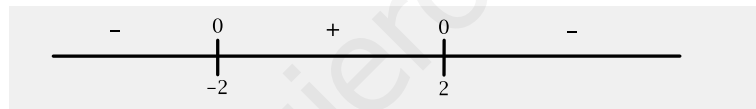
$$y - 0 = 6(x - \sqrt{3})$$

$$y - 0 = 6(x + \sqrt{3})$$

**Ejercicio 4** En la función  $y = 12x - x^3$  estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva.

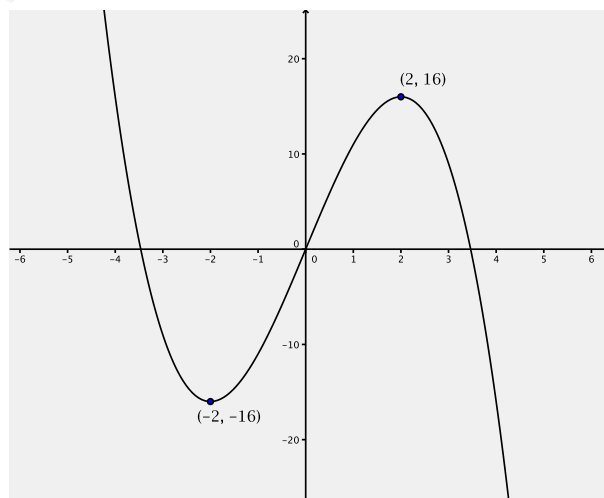
**Solución:**

Se trata de estudiar el signo de la derivada de la función  $y' = 12 - 3x^2$ . Los ceros de la derivada (puntos de tangente horizontal) son  $x = -2$  y  $x = 2$ . El signo de la derivada se muestra en el esquema siguiente: Es decir:



$x \in (-\infty, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 16)$
$x \in (-2, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, 16)$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

La representación gráfica sería entonces:



**Ejercicio 5** Calcular las asíntotas de la curva

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Representar la curva a partir de sus asíntotas y simetría.

**Solución:**

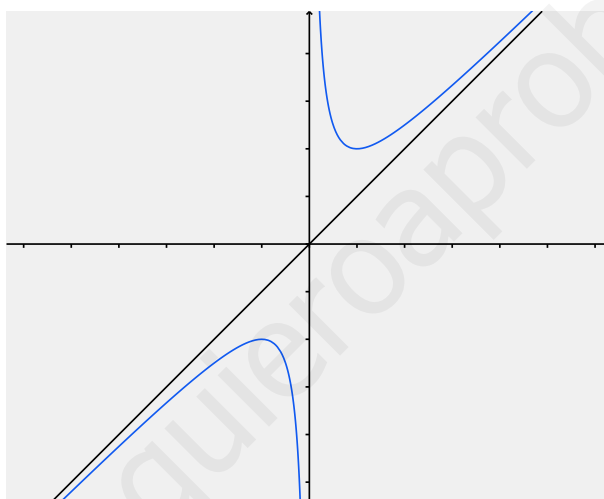
La curva tiene una asíntota vertical  $x = 0$ . No tiene asíntota horizontal porque el límite cuando  $x$  tiene a infinito es infinito. Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La asíntota oblicua es  $y = x$ .

La función tiene simetría impar puesto que el numerador es par y el denominador impar. Teniendo todo esto en cuenta y que además la curva no corta a los ejes, su representación gráfica es:



**Ejercicio 6** Representa la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$$

estudiando el crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

**Solución:**

Comenzamos calculando las asíntotas. Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador. Así se obtiene  $x = -1$  y  $x = -4$ . Como para estos valores de  $x$  el numerador no se anula la función se hace infinita, de modo que  $x = -1$  y  $x = -4$  son las asíntotas verticales.

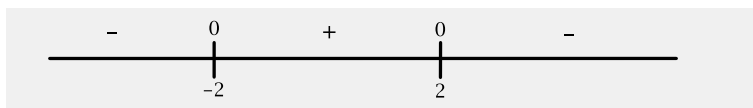
Por otra parte,  $y = 0$  es la asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

Vamos a estudiar seguidamente el signo de la derivada:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 5x + 4) - (2x + 5) \cdot x}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2}$$

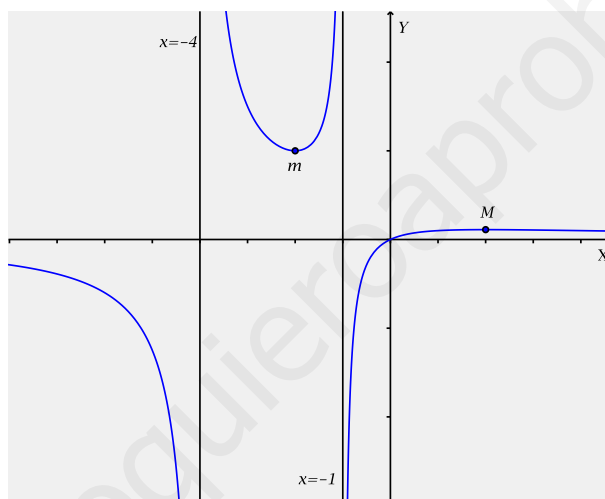
El esquema de signos es:



Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función son:

$x \in (-\infty, -4)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -4$	no existe la función	asíntota
$x \in (-4, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 1)$
$x \in (-2, -1)$	$y' > 0$	función creciente
$x = -1$	no existe la función	asíntota
$x \in (-1, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, \frac{1}{9})$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

Con estos datos la gráfica sería:



**Ejercicio 7** Se considera la función definida por:

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x + a}$$

Determinar las asíntotas de  $f$ , especificando los valores del parámetro real  $a$  para los cuales  $f$  tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

**Solución:**

Sea cual sea el valor de  $a$ , la recta  $y = 0$  es asíntota (horizontal) de la función.

Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador, es decir, las asíntotas serán

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

De acuerdo con el valor del discriminante  $1 - 4a$  puede ocurrir:

- $1 - 4a < 0 \implies$  no hay asíntotas verticales
- $1 - 4a = 0 \implies$  una asíntota vertical
- $1 - 4a > 0 \implies$  dos asíntotas verticales

Las rectas así calculadas serán asíntotas si para los valores obtenidos de  $x$  se anula el denominador y no se anula el numerador. Un caso especial se presenta para el valor  $x = 3$  que anula el numerador. Si además se anula el denominador, es decir, para

$$3^2 - 3 + a = 0 \implies a = -6$$

la función es

$$y = \frac{x - 3}{x^2 + x - 6} = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 2)}$$

Esta función no tiene una asíntota vertical en  $x = 3$  puesto que el límite cuando  $x$  tiende a 3 no es infinito. En ese punto el límite es  $1/5$  y la función presenta una discontinuidad evitable.

Resumiendo, para  $1 - 4a > 0$  hay dos asíntotas verticales

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

salvo para  $a = -6$  que solamente hay una ( $x = -2$ ).