

Ejercicio 1 (1,5 pt) *Calcular:*

$$\frac{(2-i)^2 + (1+i)^2}{1+3i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(2-i)^2 + (1+i)^2}{1+3i} &= \frac{4-4i+i^2+1+2i+i^2}{1+3i} \\ &= \frac{3-2i}{1+3i} \\ &= \frac{(3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \\ &= \frac{3-9i-2i-6i^2}{1+9} \\ &= -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i\end{aligned}$$

Ejercicio 2 (1 pt) *¿Cuánto debe valer x para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?*

Solución:

$$(25-xi)^2 = 625 - 50xi + x^2i^2 = 625 - x^2 - 50xi$$

Puesto que el número debe ser imaginario puro la parte real debe ser igual a cero:

$$625 - x^2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Ejercicio 3 (1,5 pt) *Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:*

1. $5_{\pi/6}$

2. 2_{135°

3. 5_{180°

4. 2_{495°

Solución:

$$5_{\pi/6} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$2_{135^\circ} = 2 (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$5_{180^\circ} = -5$$

$$2_{495^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Ejercicio 4 (1,5 pt) *Calcular*

$$\frac{8}{(1-i)^5}$$

Solución:

Pasamos numerador y denominador a la forma polar:

$$8 = 8_{0^\circ}$$
$$1 - i = (\sqrt{2})_{315^\circ}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left[\frac{8}{(1-i)^5} \right] &= \frac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{32})_{5 \times 315^\circ}} \\ &= \frac{8_{0^\circ}}{(4\sqrt{2})_{1575^\circ}} \\ &= \frac{8_{0^\circ}}{(4\sqrt{2})_{135^\circ}} \\ &= (\sqrt{2})_{-135^\circ} \\ &= (\sqrt{2})_{225^\circ} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (1,5 pt) *Calcula las raíces cuartas de $1 - \sqrt{3}i$.*

Solución:

El módulo y argumento de este complejo son:

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \quad \varphi \in IV \quad \varphi = 300^\circ$$

Entonces:

$$\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{(2)_{300}} = (\sqrt[4]{2})_{\frac{300^\circ + 360^\circ k}{4}}$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 obtenemos las cuatro raíces cuartas:

$$(\sqrt[4]{2})_{75^\circ}, \quad (\sqrt[4]{2})_{165^\circ}, \quad (\sqrt[4]{2})_{255^\circ}, \quad (\sqrt[4]{2})_{345^\circ}$$

Ejercicio 6 (1 pt) *Sean*

$$z_1 = (1 + i\sqrt{3})^4, \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3, \quad z_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

Calcula $z_1 z_2 z_3$ y exprésalo en forma binómica.

Solución:

Primero expresaremos los tres complejos en forma polar para hacer las potencias y el producto y después pasaremos a la forma binómica:

$$1 + i\sqrt{3} = 2_{60^\circ}, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{300^\circ}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \\ &= (2_{60^\circ})^4 \cdot (1_{300^\circ})^3 \cdot (1_{240^\circ})^3 \\ &= 16_{240^\circ} \cdot 1_{900^\circ} \cdot 1_{720^\circ} \\ &= 16_{1860^\circ} \\ &= 16_{60^\circ} \\ &= 16(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= 8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Ejercicio 7 (1 pt) El número complejo 3_{40° es el vértice de un pentágono regular centrado en el origen. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

Solución:

Puesto que el pentágono está centrado en el origen, los vértices del pentágono representan complejos del mismo módulo y argumentos que difieren en $360^\circ/5 = 72^\circ$.

Los vértices son:

$$3_{40^\circ}, \quad 3_{112^\circ}, \quad 3_{184^\circ}, \quad 3_{256^\circ}, \quad 3_{328^\circ}$$

Estos números son raíces quintas de un número complejo que puede obtenerse elevando a 5 uno cualquiera de ellos:

$$\sqrt[5]{z} = 3_{40^\circ} \implies z = (3_{40^\circ})^5 = 243_{200^\circ}$$

Ejercicio 8 (1 pt) Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos están en la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 3.

Solución:

La distancia entre los afijos de dos complejos es igual al módulo de su diferencia:

$$d(z, z') = |z - z'|$$

La circunferencia está formada por los puntos que se encuentran a distancia 3 de $1 + i$. Por consiguiente todos los puntos de la circunferencia cumplen que:

$$|z - 1 - i| = 3$$
