LA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Recuerda:

$y = ax^2 + bx + c$ es la función cuadrática.
La gráfica es una parábola.
La orientación de la parábola depende del signo de a:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ ramas hacia arriba} \rightarrow \text{función cóncava} \\ a < 0 \text{ ramas hacia abajo} \rightarrow \text{función convexa} \end{cases}$$

El eje de simetría viene dado por la recta $x = \frac{-b}{2a}$

El vértice de la parábola tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

La ordenada la determinaremos sustituyendo este valor de x_0 en la función.
Los puntos de corte con el eje de abscisas vienen dados por las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
El punto de corte con el eje de ordenadas viene dado por el punto (0, c).

Ejercicios de autoaprendizaje:

1. Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$. Estúdiala y dibújala.

SOLUCIÓ:
Es una parábola con las ramas hacia arriba, porque $a = 1 > 0$.

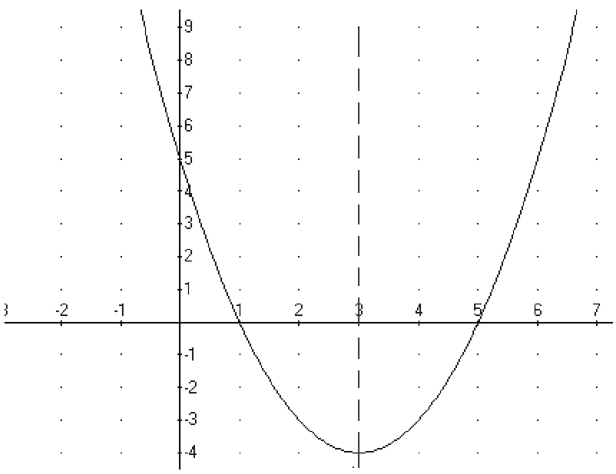
El eje de simetría es la recta $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$.

El vértice tiene por abscisa: $x_0 = 3$ y por ordenada: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

Entonces el vértice es el punto (3, –4)
Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Resolvemos y obtenemos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}.$$

Entonces los puntos de corte son: (5, 0) y (1, 0)
El punto de corte con el eje de ordenadas es (0, 5).



2. Calcula una función cuadrática que pase por los puntos (0, 1) (1, 0) y (–2, 9).
SOLUCIÓ:
Estamos buscando una función del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
El punto de corte con el eje de ordenadas es: (0, 1).
Es decir, si substituimos $x = 0$ obtenemos $y = 1$.
Por otro lado, si substituimos en la función $x = 0$, obtenemos $y = c$
Entonces, c = 1.
De momento tenemos: $y = ax^2 + bx + 1$. Nos falta determinar a y b.
Como conocemos dos puntos más de esta parábola (1, 0) (–2, 9) substituimos:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 1 \\ 9 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 1 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = a+b+1 \\ 9 = 4a-2b+1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ 4a-2b=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ 2a-b=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ 3a=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ a=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b=-2 \\ a=1 \end{array}\right\}$$

Entonces, la función cuadrática es: $y = x^2 - 2x + 1$.

Ejercicios propuestos:

1. Una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + 1$ toma el valor 7 para $x = -1$ y para $x = 2$. Determina esta función.

2. Sea la función $f(x) = x^2 + mx + m$. Determina m sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(2, 7)$.

3. Sea la función $f(x) = x^2 + mx + n$. Determina m y n sabiendo que la gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$, $(-3, 4)$.

4. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 2)$.

5. Dibuja las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 - 6x + 10$
b) $y = x^2 - 4x + 4$
c) $y = -x^2 - 4x - 2$
d) $y = x^2 - 4$
e) $y = -2x^2 - x + 6$
f) $y = x^2 + 2x + 2$

6. Una función cuadrática viene dada por la tabla siguiente:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	17	10		2	1		5		17

a) Completa la tabla teniendo en cuenta la simetría.
b) ¿Puedes determinar la fórmula que define esta función?
c) ¿Tiene valores negativos esta función?.

7. Determina una función que calcule el producto de dos números que suman 32. ¿Qué tipo de función es?. Dibújala.

8. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes?:

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^2 + 2 \qquad h(x) = x^2 - 4 \qquad m(x) = x^2 + 4$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.

9. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = -2x^2 \qquad g(x) = -2x^2 + 2 \qquad h(x) = -2x^2 - 2 \qquad m(x) = -2x^2 + 8$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.

10. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = (x+2)^2 \qquad h(x) = (x-3)^2 \qquad m(x) = (x+4)^2$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.

11. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = -2x^2 \qquad g(x) = -2(x+2)^2 \qquad h(x) = -2(x-3)^2 \qquad m(x) = -2(x+4)^2$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones.

12. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = (x+2)^2 + 1 \qquad h(x) = (x-3)^2 - 4 \qquad m(x) = (x+4)^2 + 2$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.

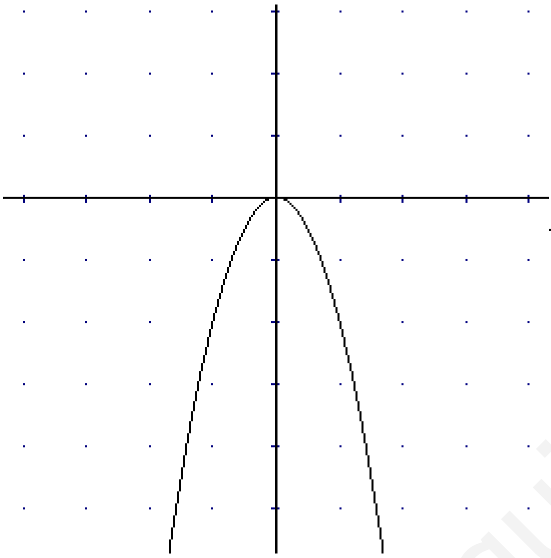
Nota:
La parábola $y = ax^2 + p$ es un traslado vertical (de p unidades) de la parábola $y = ax^2$
La parábola $y = a(x-q)^2$ es un traslado horizontal (de q unidades) de la parábola $y = ax^2$

13. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra recorre la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y f(t) la altura en metros.
Calcula el segundo que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura.
¿En qué segundo cae a tierra?. Representa la función.

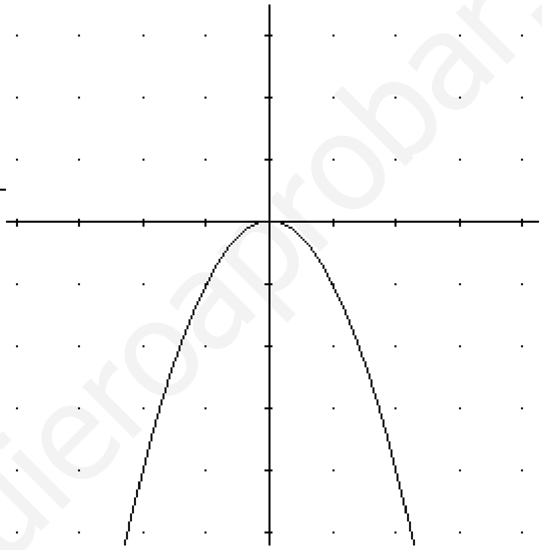
14. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2'5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones $y = 0'4x - 0'05x^2$ y $y = 1'6x - 0'2x^2$. ¿Cuál es mejor?. ¿Por qué?.

15. Identifica las siguientes funciones:

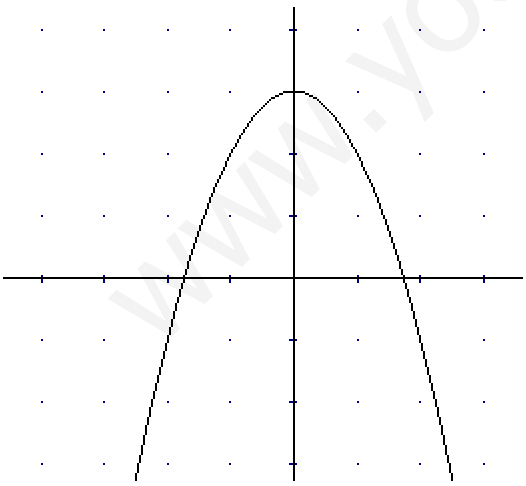
$f(x) = -x^2$ $\qquad g(x) = -x^2 + 3$ $\qquad m(x) = -x^2 - 3$ $\qquad n(x) = -2x^2$



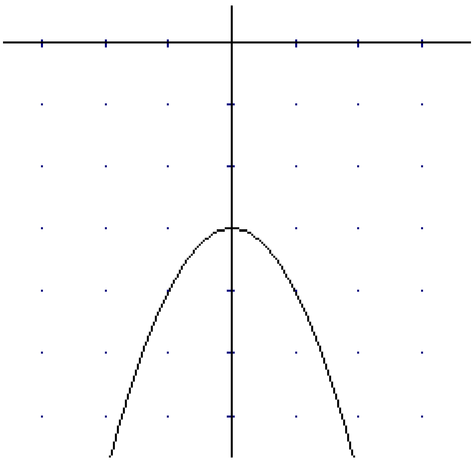
a)



b)



c)



d)