

FUNCIONES. GEOMETRIA. COMPLEJOS.

- Halla, razonadamente, el dominio de la función f_1 definida por $f_1(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{x^3 - 1}}$. (1'5 puntos).
- Halla, razonadamente y con el mínimo número de cálculos posible, el recorrido de la función f_2 definida por $f_2(x) = -x^2 - 4x + 96$. (1'5 puntos).
- Si g y h son funciones recíprocas entre sí (inversas respecto a la composición), ¿cuál es la función compuesta $g \circ h$? (0'5 puntos). Si $h(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ halla, razonadamente, la expresión de $g(x)$. (1'5 puntos).
- Sea f_3 la función definida por $f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Halla los límites de $f_3(x)$ en los puntos en los que f_3 no está definida. (3 puntos).
- Halla, razonadamente el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos $A(1, -2)$, $B(0, 3)$ y $C(-3, 2)$ estando sus coordenadas en centímetros. (2 puntos).

VOLUNTARIO:

Una de las raíces cúbicas de Z es $z_1 = -3 + 4i$; halla razonadamente el módulo y el argumento de las tres raíces cúbicas de Z . (2 puntos).

$$1. \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{x^3 - 1}} \quad \text{Dom}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 16}{x^3 - 1} \geq 0\}$$

Resolvemos la inecuación $\frac{x^2 - 16}{x^3 - 1} \geq 0$ hallando los valores que anulan al numerador y al denominador y analizando el signo que tendrá el valor numérico de la fracción en cada uno de los intervalos en que aquellos valores dividen al conjunto de los números reales:

Valores de x que anulan el numerador: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

Valores de x que anulan el denominador: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

Valor de x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$\frac{x^2 - 16}{x^3 - 1}$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{0}{-65}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-15}{0}$	$\frac{-}{+}$	$\frac{0}{63}$	$\frac{+}{+}$
	< 0	$= 0$	> 0	No existe	< 0	$= 0$	> 0

El dominio de f_1 , es decir, el conjunto de valores de x para los que $f_1(x) \in \mathbb{R}$ es:

$$\text{Dom}(f_1) = [-4, 1) \cup [4, +\infty)$$

2. El recorrido de una función es el conjunto de valores que toman las imágenes, en este caso, $f_2(x)$.

$f_2(x) = -x^2 - 4x + 96 \Rightarrow$ Se trata de una función cuadrática, cuyas características generales son conocidas. Su gráfica es una parábola y, al ser negativo (-1) el coeficiente de x^2 , tiene las ramas hacia abajo, por lo que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = -\infty$ y, su vértice es el punto más alto (máximo).

El vértice corresponde al punto en que $x = \frac{-B}{2A} \xrightarrow{A=-1 \text{ y } B=-4} x = -2$ y su imagen, es decir, el valor mayor del recorrido es: $f_2(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 96 = 100$

El recorrido de f_2 , es decir, el conjunto de valores $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ que tienen antiimagen es:

$$\text{Rec}(f_2) = (-\infty, 100]$$

3. Si g y h son funciones recíprocas entre sí \Rightarrow la compuesta $g \circ h$ de ambas es, por definición, la función identidad, es decir: $(g \circ h)(x) = x$.

$$h(x) = \frac{x+2}{2x-3} \Leftrightarrow y = \frac{x+2}{2x-3}$$

las funciones recíprocas tienen intercambiadas las variables (por eso al hacer la composición de ambas el resultado es la función identidad)

$$y = \frac{x+2}{2x-3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{y+2}{2y-3} \text{ Despejando } y \text{ tendremos el valor de } h^{-1}(x), \text{ es decir, de } g(x)$$

$$x = \frac{y+2}{2y-3} \Rightarrow 2xy - 3x = y + 2 \Rightarrow 2xy - y = 3x + 2 \Rightarrow y(2x - 1) = 3x + 2 \Rightarrow y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$$

$$g(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$$

Comprobación de que $(g \circ h)(x) = x$:

$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left(\frac{x+2}{2x-3}\right) = \frac{3\frac{x+2}{2x-3} + 2}{2\frac{x+2}{2x-3} - 1} = \frac{\frac{3x+6}{2x-3} + \frac{4x-6}{2x-3}}{\frac{2x+4}{2x-3} - \frac{2x-3}{2x-3}} = \frac{\frac{7x}{2x-3}}{\frac{7}{2x-3}} = \frac{7x}{7} = x$$

De igual manera, podemos comprobar que $(h \circ g)(x) = x$:

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right) = \frac{\frac{3x+2}{2x-1} + 2}{2\frac{3x+2}{2x-1} - 3} = \frac{\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{4x-2}{2x-1}}{\frac{6x+4}{2x-1} - \frac{6x-3}{2x-1}} = \frac{\frac{7x}{2x-1}}{\frac{7}{2x-1}} = \frac{7x}{7} = x$$

$$4. \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{Se trata de una función definida a trozos}$$

En el primer intervalo, $x < 0$ es decir, $\forall x \in (-\infty, 0)$ está definida por $f_3(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$ que,

únicamente, no existe en los valores negativos que anulan al denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{pero al intervalo en que se define por esta expresión sólo pertenece } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

En el segundo intervalo, $x > 0$ es decir, $\forall x \in (0, +\infty)$ está definida por $f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$ que,

únicamente, no existe en los valores positivos que anulan al denominador:

$$x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{y} \quad x = 1 \quad \text{pero al intervalo en que se define por esta expresión sólo pertenece } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1} = \begin{cases} +\infty & \text{cuando } x \rightarrow 1^- \\ -\infty & \text{cuando } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

Como no coinciden los límites laterales, en $x = 1$ no tiene límite.

Por último, la función tampoco está definida en $x = 0$, frontera de los dos intervalos

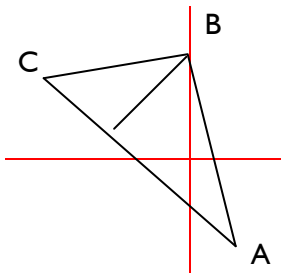
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned} \right\} \quad \text{Al no coincidir los límites laterales, en } x = 0 \text{ tampoco tiene límite}$$

Los valores de x para los que no está definida f_3 son: $x = -2$, $x = 1$ y $x = 0$

El límite en $x = -2$ es: $\lim_{x \rightarrow -2} f_3(x) = \frac{3}{4}$ y en los otros dos puntos no tiene

límite por no coincidir los valores de límites laterales en ellos.

5. $A(1, -2)$, $B(0, 3)$ y $C(-3, 2)$



$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}$$

Si tomamos como *Base* = CA, entonces *Altura* = distancia entre B y el lado CA.

$$\vec{CA} = (1 - (-3), -2 - 2) = (4, -4) \Rightarrow \text{Base} = |\vec{CA}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Para calcular la *Altura* = distancia entre B y el lado CA. Hallaremos primero la ecuación de la recta, r , que contiene a la base:

Vector director de r es, por ejemplo: $\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{CA} = (1, -1)$ y un punto de r es $A(1, -2)$ por lo que la ecuación

de r es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1}$ que en forma general queda $x + y + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv (x + y + 1 = 0) \\ B(0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Altura} = d(B, r) = \frac{|0 + 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \text{ cm} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ cm}}{2} = \boxed{8 \text{ cm}^2}$$

VOLUNTARIO:

$$\text{Sea } Z = R_\alpha \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{R_\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt[3]{R} \\ \text{Argum.: } \beta = \frac{\alpha + 360^\circ k}{3} = \frac{\alpha}{3} + 120^\circ k \end{array} \right. \quad \text{Dando valores consecutivos a } k$$

k obtenemos los argumentos de las tres raíces cúbicas que se diferencian entre sí en 120° . Si tenemos una, podemos hallar las otras dos, sin más que sumar o restar 120° a su argumento. El módulo es el mismo para todas.

$z_1 = -3 + 4i$ el afijo de z_1 está en el segundo cuadrante por tener la componente real negativa (-3) y la imaginaria positiva (4):

$$z_1 = -3 + 4i = \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo: } r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \text{Argum.: } \text{Arctg} \frac{4}{-3} = -53'13'' + 180^\circ = 126'87'' \end{array} \right. \quad 126'87'' \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{-120^\circ} 6'87'' \\ \xrightarrow{+120^\circ} 246'87'' \end{array} \right.$$

El módulo de las tres raíces cúbicas de Z es $r = 5$
y sus argumentos: $6'87''$, $126'87''$ y $246'87''$, respectivamente.