

EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVABILIDAD.

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ estudiar la derivabilidad y calcular f' cuando sea posible.

a. Continuidad.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{\text{sen}x}{x} \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\} \\ y = x e^x + 1 \text{ es continua en } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{continuas en } \mathbb{R} - \{0\}$$

Estudiamos la continuidad en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = \left(\frac{0}{0} \text{ ind} \right) \underset{\substack{\text{sen}x \approx x \\ \text{infinitésimo}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^x + 1 = 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

$f(0) = 1 \rightarrow$ La función es continua en $x=0$ y por tanto en todo \mathbb{R}

b. Derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \text{sen}x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + x e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x - \text{sen}x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind} \right) \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \text{sen}x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \text{sen}x}{2} = 0 \Rightarrow \text{no es derivable en } x=0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x e^x) = 1$$

2. Calcular "a" y "b" para que la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen}x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x=0$.

a. Continuidad en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \wedge \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{sen}x = 0 \wedge f(0) = 0 \Rightarrow \text{continua si } b = 0$$

b. Derivabilidad en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + a = a \end{array} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{derivable para } a = 1 \text{ y } b = 0.$$

3. Calcular "a" y "b" para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en $x=1$.

a. Continuidad en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ax^2 + b = a + b \quad f(1) = a + b \Rightarrow a + b = 0$$

b. Derivabilidad en $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax = 2a \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = f(x) \text{ es derivable en } x=1 \text{ si } a = 1/2 \text{ y } b = -1/2$$