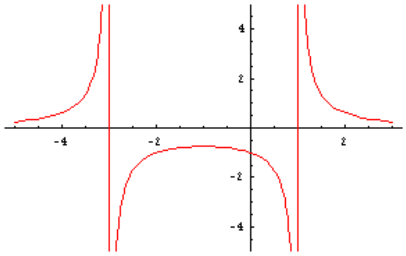
ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

EJERCICIOS RESUELTOS

Determina *a*, *b* y *c* para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ **sea la siguiente:**



De la figura se observa que $f(-2) = -1$, y que las rectas $x = -3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.
De $f(-2) = -1$, obtenemos:

$$-1 = \frac{a}{4 - 2b + c} \qquad \Rightarrow \qquad a = -4 + 2b - c$$

Como $x = 1$ es asíntota vertical tenemos $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x^2 + bx + c} = \dfrac{a}{1 + b + c} = +\infty$, de donde:

$$1 + b + c = 0$$

Análogamente como $x = -3$ es asíntota vertical tenemos $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{a}{x^2 + bx + c} = \dfrac{a}{9 - 3b + c} = +\infty$, de donde:

$$9 - 3b + c = 0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a = -4 + 2b + c \\ 1 + b + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases}$

se obtiene $a = 3$, $b = 2$ y $c = -3$, con la cual la función pedida es $y = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$.

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ **para** $x \neq 1$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Estudia la posición de la gráfica de *f* respecto de sus asíntotas.

En primer lugar, tengamos en cuenta que $Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$, pues para $x = 1$ no está definida.
a) Como:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

entonces $x = 1$ es una asíntota vertical de f.
Por otra parte, tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$$

y por tanto, no existen asíntotas horizontales.
Veamos si tiene asíntotas oblicuas. Para la función racional dada, existe una asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador. Dicha asíntota es de la forma $y = mx + n$. Calculemos m y n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

Veamos la posición relativa. Con respecto a la asíntota vertical $x = 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Con respecto a la asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[f(x) - (x - 1) \right] = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1) \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0^+$$

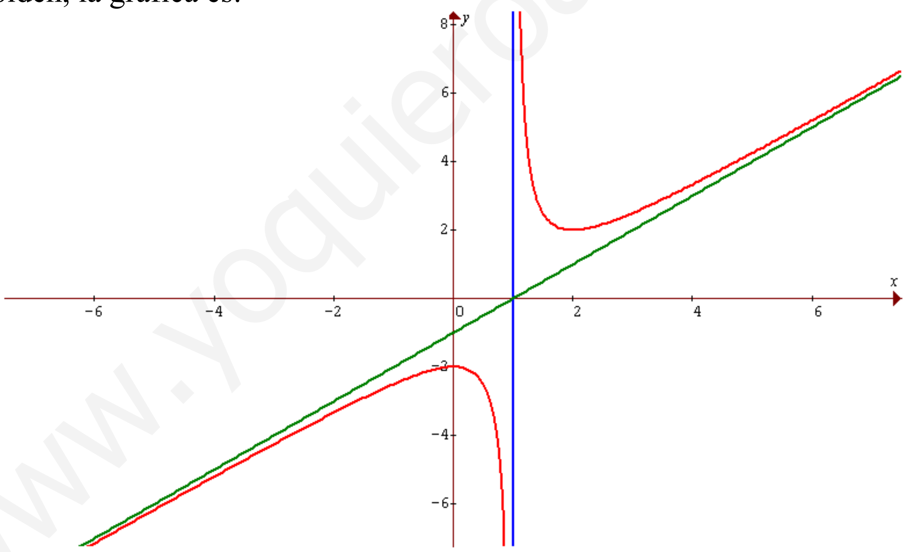
Luego $f(x)$ está por encima de la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - (x - 1) \right] = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1) \right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0^-$$

Luego $f(x)$ está por debajo de la asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

Aunque no la piden, la gráfica es:



a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos relativos y absolutos, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) En primer lugar tengamos en cuenta que al esta la función definida para $x > 0$, su dominio es:

$$Dom\, f(x) = (0, +\infty)$$

Como el punto $x = 0$ es un punto frontera del dominio de la función, veamos si en él se presenta una asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Como la función $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$ es un cociente de polinomios con el numerador de un grado más que el denominador tiene una asíntota oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - m\,x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1+x^2}{x} - x \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1+x^2-x^2}{x} \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$ (es la bisectriz del primer).

b) Para ver su monotonía estudiamos su derivada primera:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x\cdot x - (1+x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

El único punto que estudiaremos será $x = 1$, pues la función únicamente está definida para $x > 0$. Estudiemos el signo de la derivada primera en los distintos intervalos en que queda dividida la recta real:

$f'(x) < 0$ $\qquad\qquad$ $f'(x) > 0$

0 $\qquad\qquad$ 1

De lo anterior se deduce que f decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Por tanto, en $x = 1$ hay un mínimo relativo. Mínimo = $(1, 2)$. Dicho mínimo relativo es también un mínimo absoluto, pues como vimos anteriormente:

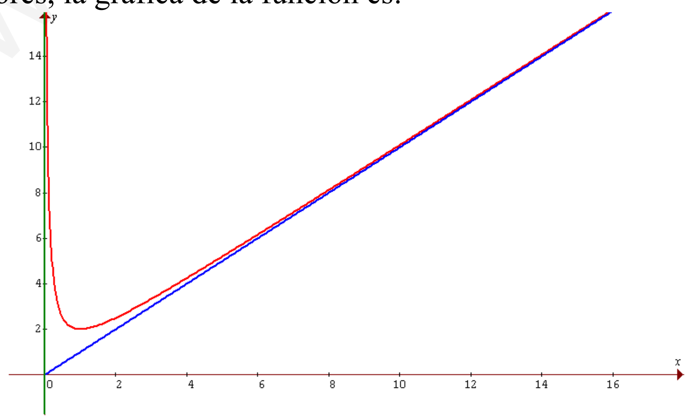
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

y además:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x} = +\infty$$

La función no presenta máximos ni relativos ni absolutos.

b) Con los datos anteriores, la gráfica de la función es:



Sea f la función $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f.

a) Asíntotas verticales. Las rectas $x = 0$ y $x = 2$ son asuntotas verticales pues en dicho puntos $f(x)$ no está definida.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta } x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{15}{0^-} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta } x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Por otra parte, como:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$

la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $\pm\infty$ de $f(x)$.
Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua (son excluyentes).

b) Monotonía. Estudiemos de $f'(x)$

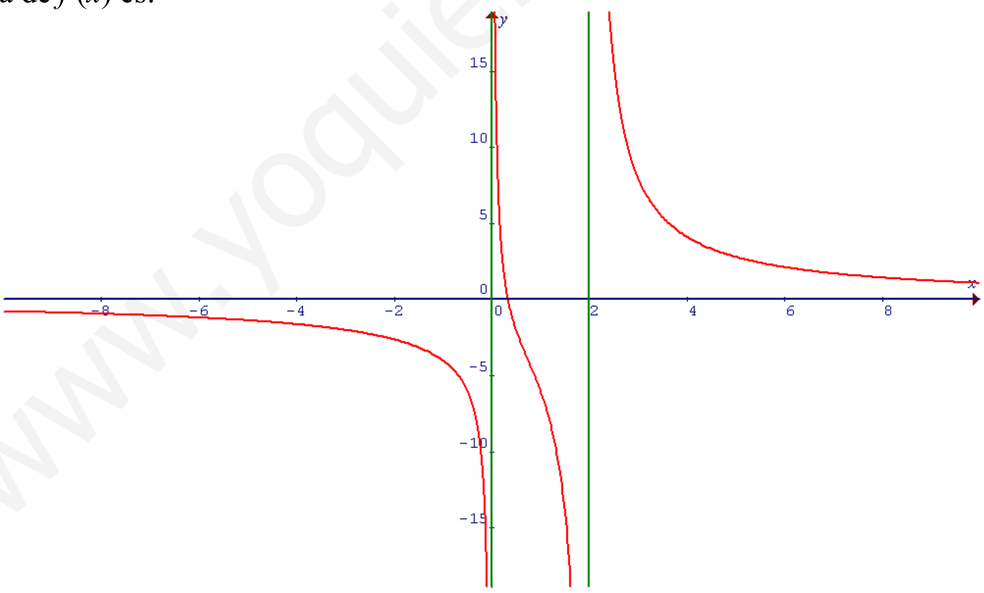
$$f'(x) = \frac{9 \cdot (x^2-2x) - (9x-3) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -9x^2 + 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales}$$

Por tanto la función siempre es creciente o decreciente en su dominio. Para elegir entre ambas opciones, sustituiremos un número cualquiera en la primera derivada. Si nos da positivo la función es creciente y si nos da negativo la función es decreciente. Probamos, por ejemplo, el valor $x = 1$:

$$f'(1) = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{luego la función es decreciente en todo su dominio}$$

c) La gráfica de $f(x)$ es:



Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+3)\, e^{-x}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.
c) Esboza la gráfica de f.

a) En primer lugar, tengamos en cuenta que $Dom\, f(x) = \mathbb{R}$. Por tanto, no hay asíntotas verticales.
Por otra parte, como:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f cuando $x \to +\infty$.
Además:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty+3}{e^{-\infty}} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Por tanto, no hay asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
Como para $x \to +\infty$ hay una asíntota horizontal, entonces ya no hay asíntota oblicua.
Para $x \to -\infty$, si hay asíntota oblicua, esta será de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad n = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$$

Ambos límites han de existir y ser finitos.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)e^{-x}}{x} = = +\infty$$

Por tanto tampoco hay asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

b) Calculemos la derivada de $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$:

$$f'(x) = \frac{1\cdot e^x - (x+3)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x-2}{e^x}$$

Los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-x-2}{e^x} = 0 \quad\Rightarrow\quad -x-2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = -2$$

Para estudiar si es máximo o mínimo, calculemos la derivada segunda de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{-1\cdot e^x - (-x-2)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x+1}{e^x} \quad\Rightarrow\quad f''(-2) = \frac{-1}{e^{-2}} = -e^2 < 0$$

Por tanto, en $x = -2$ hay un máximo.

Máximo en $(-2, e^2)$

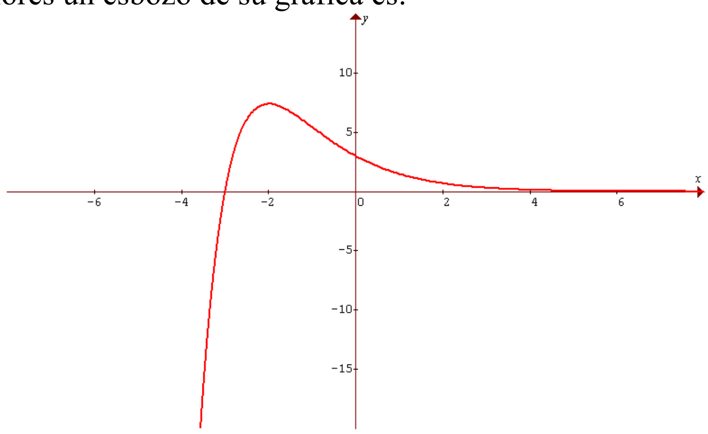
Para estudiar los puntos de inflexión debemos resolver la ecuación $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x+1}{e^x} = 0 \quad\Rightarrow\quad x+1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = -1$$

Se observa fácilmente que a la izquierda de $x = -1$, la derivada segunda es negativa ($f''(-2) < 0$), y por tanto $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$ y a la derecha de $x = -1$ la derivada segunda es positiva ($f''(0) > 0$), y por tanto $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$. Como en $x = -1$ cambia la curvatura, se deduce que en él hay un punto de inflexión.

Punto de inflexión = $(-1, 2e)$

c) Con los datos anteriores un esbozo de su gráfica es:

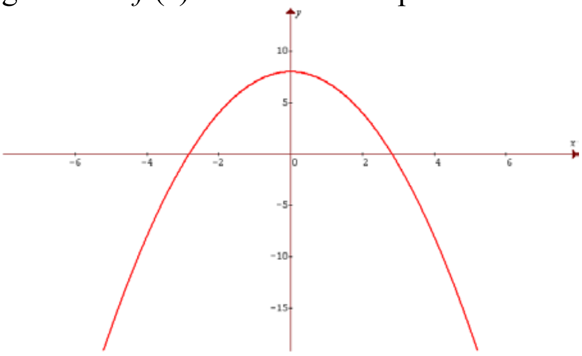


Sea f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$.

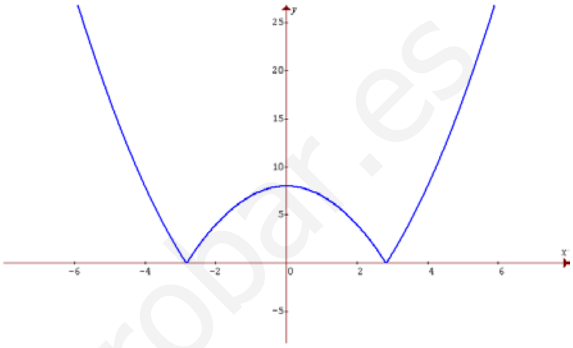
a) **Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores)**

b) **Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.**

a) La gráfica de la función $f(x)$ la podemos dibujar a partir de la de la función $g(x) = 8 - x^2$, pero reflejando sobre el eje de abscisas aquella parte de la gráfica que quede por debajo del mismo. La gráfica de $g(x)$ es una parábola con vértice en el punto (0, 8), que corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{8}, 0)$ y $(\sqrt{8}, 0)$, y que tiene sus ramas dirigidas hacia la parte negativa del eje OY. Entonces la gráfica de $f(x)$ la obtenemos a partir de esta como:



$\Rightarrow$



Como se puede ver en la gráfica anterior, se presentan dos mínimos en los puntos $(-\sqrt{8}, 0)$ y $(\sqrt{8}, 0)$, y un máximo en (0, 8). Hagamos un estudio analítico de f para comprobar que es así. Para ello, escribamos la función f como una función definida a trozos:

$$f(x) = |8 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{si} \quad x \le -\sqrt{8} \\ -(x^2 - 8) & \text{si} \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & \text{si} \quad x \ge \sqrt{8} \end{cases}$$

(esto es así ya que $8 - x^2 = 0$ tiene como soluciones $x = \pm\sqrt{8}$)

Estudiemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -\sqrt{8} \\ -2x & \text{si} \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ 2x & \text{si} \quad x > \sqrt{8} \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que f no es derivable en $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$. Por otra parte, igualando la derivada a cero, vemos que sólo tiene sentido estudiar el caso en que $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$, ya que es el único intervalo en el que está comprendido el punto singular que obtenemos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

A la izquierda de $x = 0$, $f'(x)$ es creciente y a la derecha decreciente. Por tanto se presenta un máximo en el punto (0, 8).

Además debemos estudiar también los puntos $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$ en los que la función no es derivable. Fácilmente se observa que a la izquierda de $x = -\sqrt{8}$ la función decrece y a la derecha crece, luego hay un mínimo en el punto $(-\sqrt{8}, 0)$. Por otra parte, a la izquierda de $x = \sqrt{8}$ la función decrece y a la derecha crece, luego hay otro mínimo en el punto $(\sqrt{8}, 0)$.

b) La recta tangente en $x = -2$ viene dada por:

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$$

$f'(x) = -2x$; $f(-2) = 8 - (-2)^2 = 4$; $f'(-2) = (-2) \cdot (-2) = 4$

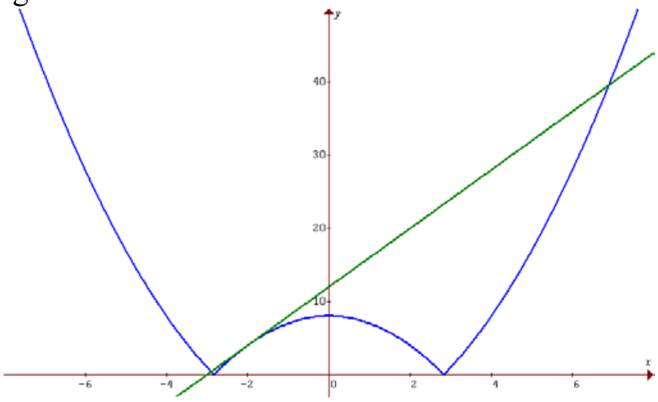
$$y - 4 = 4(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = 4x + 12.$$

El corte de la tangente $y = 4x + 12$ con f lo estudiamos del siguiente modo:

$$x^2 - 8 = 4x + 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{24}$$

$$8 - x^2 = 4x + 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

En definitiva, la tangente corta a la función $f(x) = |\,8 - x^2|$ en $x = -2$ y en $x = 2 \pm \sqrt{14}$, como se puede ver en la siguiente gráfica:



Representa gráficamente la función $y = x^4 - 2x^2$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función polinómica, su dominio de definición es $\mathbb{R}$ y además es continua en todo el dominio.

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = x^4 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 (x^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0 \text{ (doble) y } x = \pm\sqrt{2}$$

Por tanto los puntos de corte son $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$y = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Por tanto el punto de corte es $(0, 0)$.

III) **Simetrías**

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

Por tanto, $f(x) = f(-x)$, la función es **par**, esto es, simétrica respecto al eje OY.

IV) **Periodicidad**

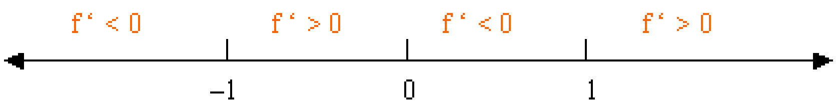
La función **no** es periódica. En la mayoría de los casos se estudiará la periodicidad solamente cuando aparezcan funciones trigonométricas.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

$$4x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0,\ x = 1 \text{ y } x = -1$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Es **decreciente** en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

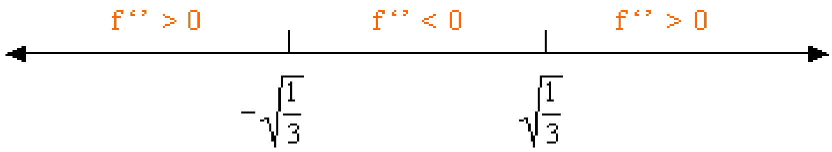
VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$; $\quad f''(x) = 12x^2 - 4$.
$f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $(-1, -1)$.
$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $(0, 0)$.
$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $(1, -1)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f''(x) = 0$.

$$12x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíces: } x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Así:



Por tanto, es **convexa** en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

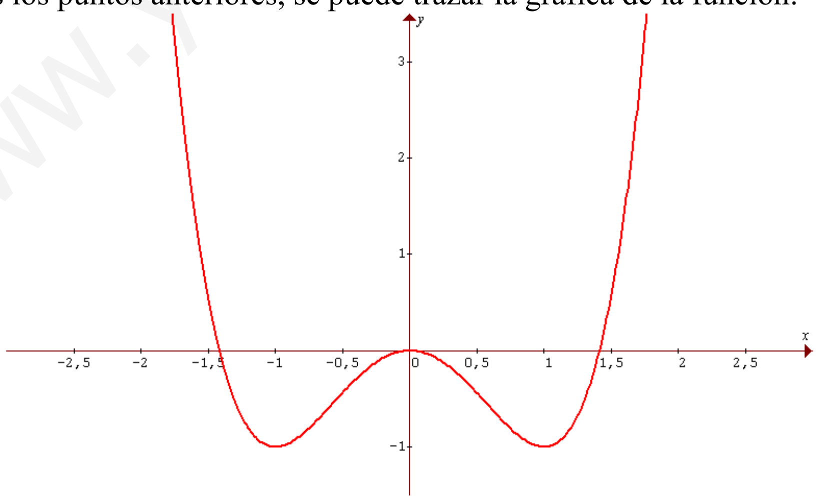
VIII) **Puntos de inflexión**
Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, calculemos la derivada tercera: $f'''(x) = 24x$.

$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0$, hay un **punto de inflexión** en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$.

$f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0$, hay un **punto de inflexión** en $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$.

IX) **Asíntotas**
No existen asíntotas de ningún tipo, pues se trata de una función polinómica.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función racional, no pertenecerán al dominio los puntos que anulen el denominador. Por tanto: $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$.

$$\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x^3}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad 0 = x^3 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 0 \text{ (triple)}$$

Por tanto el punto de corte es (0, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0^3}{0^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 0).$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

Por tanto, $f(-x) = -f(x)$, la función es **impar**, esto es, simétrica respecto al origen de coordenadas.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$. Debemos estudiar el signo de f', pero podemos darnos cuenta que su signo coincidirá con el signo del numerador dado que el denominador siempre es positivo, por tratarse de un cuadrado. Estudiemos por tanto el signo del numerador, calculando en primer lugar sus raíces:

$$x^4 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0 \text{ (doble) y } x = \pm\sqrt{3}$$

Así:

f' > 0 | $-\sqrt{3}$ | f' < 0 | -1 | f' < 0 | 0 | f' < 0 | 1 | f' < 0 | $\sqrt{3}$ | f' > 0

Por tanto, es **creciente** en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es **decreciente** en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

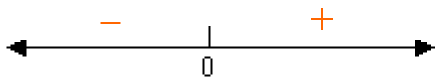
$f''(0) = 0$, y por tanto no se puede decidir todavía si hay máximo, mínimo o punto de inflexión.

$f''(\sqrt{3}) > 0$, y por tanto hay un **mínimo** en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

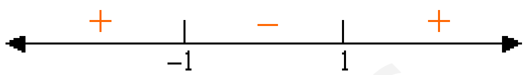
VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de f''. Estudiemos por tanto el signo del numerador, y el signo del denominador por separado, calculando en primer lugar sus raíces:

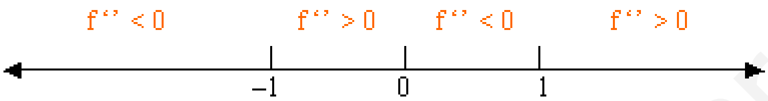
$2x^3 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ (No tiene más raíces reales)



$(x^2 - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Raíces: $x = -1$ y $x = 1$.



Así, resumiendo:



Por tanto, es **convexa** en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
Es **cóncava** en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda (son las raíces del numerador), estudiemos como varía la curvatura en ellas.
En $x = 0$, la curvatura cambia de convexa a cóncava, esto es, hay un **punto de inflexión** en (0, 0).

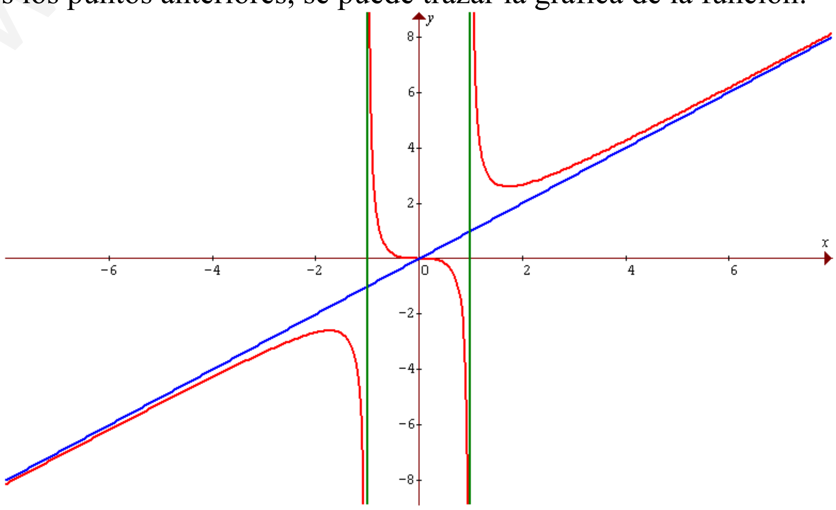
IX) **Asíntotas**

Se presentan dos **asíntotas verticales** en aquellos puntos que no pertenecen al dominio, esto es, en $x = -1$ y en $x = 1$.
Por otra parte, también se presentará una asíntota oblicua ($y = mx + n$) por tratarse de una función racional en la que el grado del numerador es mayor que el del denominador en una unidad. Calculemos m y n.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x}{x^2 - 1}\right] = 0$$

Por tanto la **asíntota oblicua** es $y = x$.
Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

I) **Dominio**

Por tratarse de una función racional, no pertenecerán a su dominio de definición los valores que anulen el denominador.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 2$$

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Por tanto la función no será continua ni en $x = 1$ ni en $x = 2$.

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = x^2 - 5x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíces: } x = 2 \text{ y } x = 3$$

El único punto de corte con los ejes es (3, 0), ya que $x = 2$ no está en el dominio de la función.

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0^2 - 5\cdot 0 + 6}{0^2 - 3\cdot 0 + 2} = 3 \qquad \Rightarrow \text{ Por tanto el punto de corte es } (0, 3).$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5\cdot(-x) + 6}{(-x)^2 - 3\cdot(-x) + 2} = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. La función **no es par ni impar**. Por tanto no presenta estas simetrías.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica. En la mayoría de los casos se estudiará la periodicidad solamente cuando aparezcan funciones trigonométricas.

V) **Monotonía**

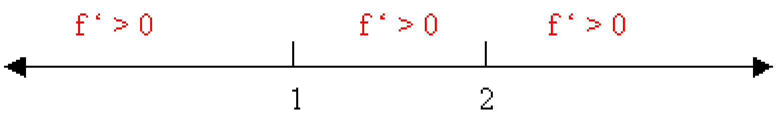
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)\cdot(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 5x + 6)\cdot(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 - 8x + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíces: } x = 2 \text{ (doble)}$$

Así:



Por tanto, es **siempre creciente.**

VI) **Extremos relativos**

Debemos darnos cuenta de que único punto singular que calculamos fue $x = 2$, pero este es un punto que no pertenece al dominio de definición de la función, y por tanto no tiene sentido estudiarlo. No habrá ni máximos ni mínimos.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, calculemos $f''(x)$:

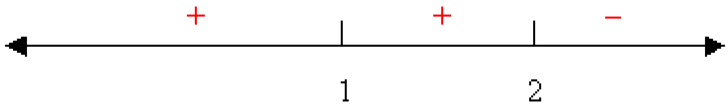
$$f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot(x^2-3x+2)^2-(2x^2-8x+8)\cdot 2\cdot(x^2-3x+2)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4} =$$

$$= \frac{4x^3-20x^2+32x-16-8x^3+44x^2-80x+48}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{-4x^3+24x^2-48x+32}{(x^2-3x+2)^3}$$

Resolvamos la inecuación $f''(x) > 0$.

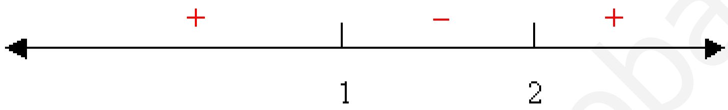
Numerador:

$$-4x^3+24x^2-48x+32=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 2 \text{ (triple)}$$

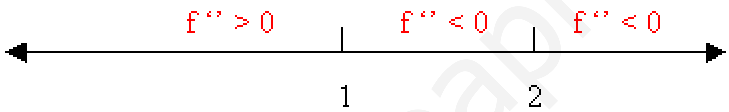


Denominador:

$$(x^2-3x+2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+2=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x=1 \text{ y } x=2$$



Así:



Por tanto, es **convexa** en $(-\infty, 1)$.

Es **cóncava** en $(1, +\infty)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Debemos darnos cuenta de que único punto en el que se anula la derivada segunda es $x = 2$, pero este es un punto que no pertenece al dominio de definición de la función, y por tanto no tiene sentido estudiarlo. No habrá puntos de inflexión.

IX) **Asíntotas**

En principio se podría pensar que se presentan dos **asíntotas verticales** en aquellos puntos que no pertenecen al dominio, esto es, en $x = 1$ y en $x = 2$. Sin embargo, en $x = 2$ no se presenta asíntota vertical ya que, aunque el límite es indeterminado, sí existe y es finito.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

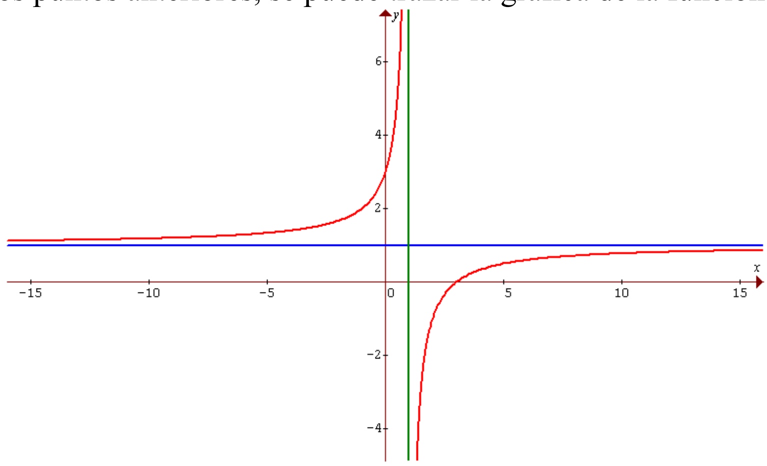
Veamos si existen **asíntotas horizontales**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = 1$$

Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas, pues estas dos son incompatibles.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = x \cdot e^{-x}$.

I) **Dominio**

La función en cuestión se puede escribir como $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. No pertenecerán al dominio los puntos que anulen el denominador, pero en este caso e^x no toma nunca el valor 0. Por tanto:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad 0 = x \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 0$$

Por tanto el punto de corte es (0, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0}{e^0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 0)$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y también $f(-x) \neq -f(x)$, con lo cual la función **no es par ni impar**.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

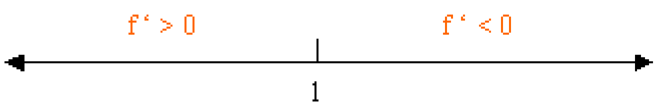
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{(Punto singular)}$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(-\infty, -1)$.
Es **decreciente** en $(1, +\infty)$.

VI) **Extremos relativos**
Calculemos $f''(x)$:

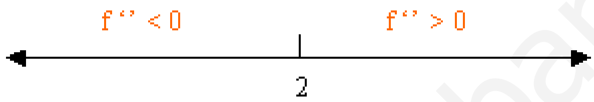
$$f''(x) = \frac{(-1)\cdot e^x - (1-x)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

$f''(1) = \frac{-1}{e} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f''(x) = 0$.

$$\frac{x-2}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 2$$

Así:



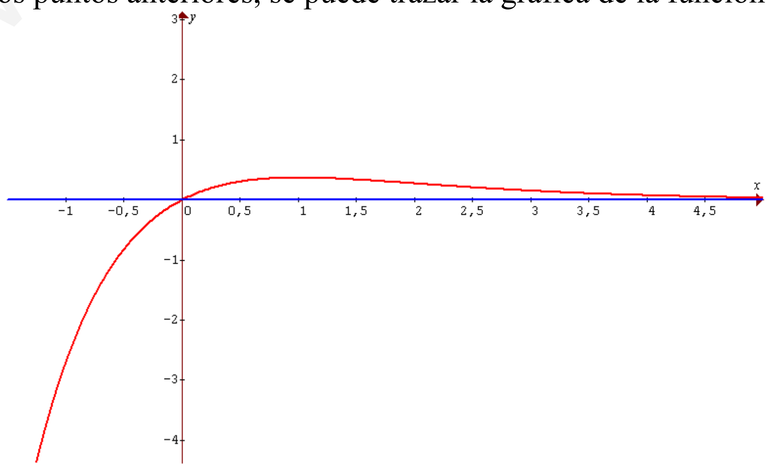
Por tanto, es **convexa** en $(2, +\infty)$.
Es **cóncava** en $(-\infty, 2)$.

VIII) **Puntos de inflexión**
Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, estudiemos cómo varía la curvatura en ellas. A la izquierda de $x = 2$ la función es cóncava, mientras que a la derecha es convexa, esto es, cambia la curvatura y por tanto habrá un **punto de inflexión** en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

IX) **Asíntotas**
No existen asíntotas verticales, pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$, esto es, no existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$. Por tanto sí existe **asíntota horizontal** cuando $x \to +\infty$ y esta es la recta $y = 0$.
Como hay asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.
Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

I) **Dominio**

La función en estudio tiene un denominador y una raíz. Por tanto, no pertenecerán al dominio los valores que anulen el denominador, ni los que hagan el radicando negativo. Sin embargo, se puede observar fácilmente que el radicando siempre toma valores positivos y por tanto se deduce que:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad 0 = x+1 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = -1$$

Por tanto el punto de corte es $(-1, 0)$.

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$$y = \frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Por tanto el punto de corte es } (0, 1)$$

III) **Simetrías**

$$f(-x) = \frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Por tanto, $f(-x) \neq f(x)$ y también $f(-x) \neq -f(x)$, con lo cual la función **no es par ni impar**.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - (x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{(x^2+1)-(x^2+x)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 \quad \text{(Punto singular)}$$

Así:

$f' > 0$ | 1 | $f' < 0$

Por tanto, es **creciente** en $(-\infty, -1)$.

Es **decreciente** en $(1, +\infty)$.

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-1)\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1-x)\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]^2} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(-1)\cdot(x^2+1)-(1-x)\cdot 3\cdot x\right]}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-x^2 - 1 - 3x + 3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2 - 3x - 1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(1) = \dfrac{-2}{\sqrt{32}} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(1, \sqrt{2}\right)$.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de $f''(x)$. Sin embargo, el denominador siempre es positivo y por tanto el signo de la derivada segunda coincide con el signo del numerador. Estudiemos su signo:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíces: } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Así:

Por tanto, es **convexa** en $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Como ya sabemos las raíces de la derivada segunda, estudiemos cómo varía la curvatura en ellas, ya que calcular la derivada tercera sería bastante laborioso. A la izquierda de $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ la función es convexa, mientras que a la derecha es cóncava, esto es, cambia la curvatura y por tanto habrá un **punto de inflexión** en $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$. De igual modo, en $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$, la curvatura cambia de cóncava a convexa y por tanto también habrá otro **punto de inflexión** en $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.

IX) **Asíntotas**

No existen asíntotas verticales, pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

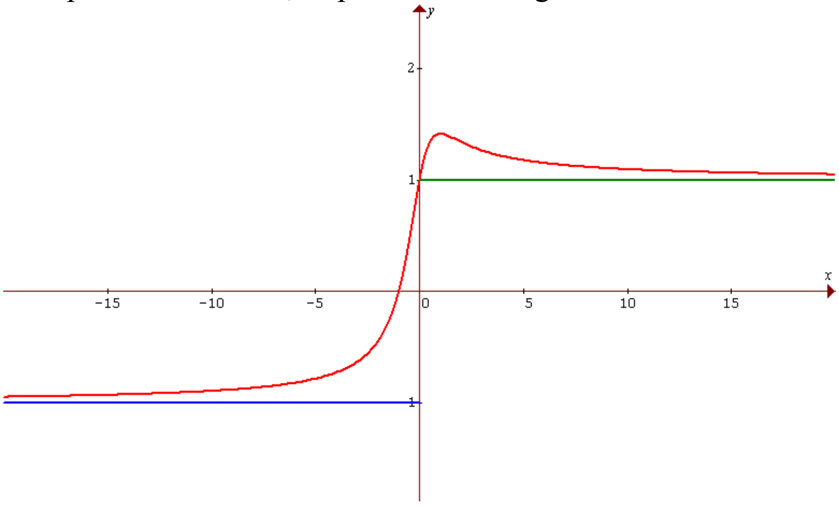
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$, esto es existe **asíntota horizontal** cuando $x \to -\infty$ y esta es $y = -1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, por tanto existe **asíntota horizontal** cuando $x \to +\infty$ y esta es las recta $y = 1$.

Como hay asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = \dfrac{\text{Ln}\, x}{x}$.

I) **Dominio**

En la función sometida a estudio aparece un logaritmo y un denominador. Por tanto no pertenecerán al dominio los puntos que hagan negativo o nulo el argumento del logaritmo, ni aquellos que anulen el denominador. Por tanto:

$$Dom\, f(x) = (0, +\infty)$$

II) **Cortes con los ejes**

Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$$0 = \frac{\text{Ln}\, x}{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = \text{Ln}\, x \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = 1$$

Por tanto el punto de corte es (1, 0).

Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y. Sin embargo, en este caso $x = 0$ no pertenece al dominio, lo cual significa, que no cortará al eje OY.

III) **Simetrías**

Por ser $Dom\, f(x) = (0, +\infty)$, no podrá ser simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen de coordenadas. Por tanto la función no es **ni par ni impar**.

IV) **Periodicidad**

La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

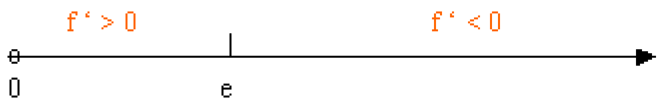
Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \text{Ln}\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \text{Ln}\, x}{x^2}$$

Debemos estudiar su signo, pero teniendo en cuenta que el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada coincide con el signo del numerador. Estudiémoslo:

$$1 - \text{Ln}\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e \ \text{(Punto singular)}$$

Así:



Por tanto, es **creciente** en $(0, e)$.
Es **decreciente** en $(e, +\infty)$.

VI) **Extremos relativos**
Calculemos $f''(x)$:

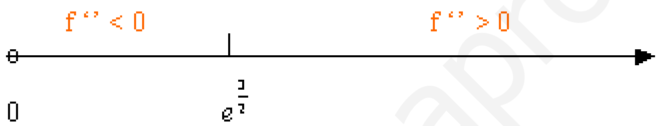
$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x^2 - (1 - Ln\,x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\cdot \text{Ln}\,x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\cdot \text{Ln}\,x}{x^4} = \frac{2\text{Ln}\,x - 3}{x^3}$$

$f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

VII) **Curvatura**
Para estudiar la curvatura, debemos estudiar el signo de $f''(x)$. Sin embargo, el denominador siempre es positivo (puesto que x únicamente puede tomar valores positivos) y por tanto el signo de la derivada segunda coincide con el signo del numerador. Estudiemos su signo:

$$2\,\text{Ln}\,x - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Ln}\,x = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Raíz: } x = e^{\frac{3}{2}}$$

Así:



Por tanto, es **convexa** en $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

Es **cóncava** en $\left(0,\ e^{\frac{3}{2}}\right)$.

VIII) **Puntos de inflexión**
De momento ya sabemos las raíces de la derivada segunda.

$$f'''(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)\cdot x^3 - (2\,\text{Ln}\,x - 3)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2 - 6x^2\cdot \text{Ln}\,x + 9x^2}{x^6} = \frac{11x^2 - 6x^2\cdot \text{Ln}\,x}{x^6} = \frac{11 - 6\text{Ln}\,x}{x^4}$$

$$f'''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{e^6} > 0$$

Por tanto habrá un **punto de inflexión** en $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

IX) **Asíntotas**
Estudiemos lo que ocurre en $x = 0$ que es el "punto frontera" del dominio de definición de la función.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Ln}\,x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \text{Ln}\,x\right) = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\text{Ln}\,x\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)$$

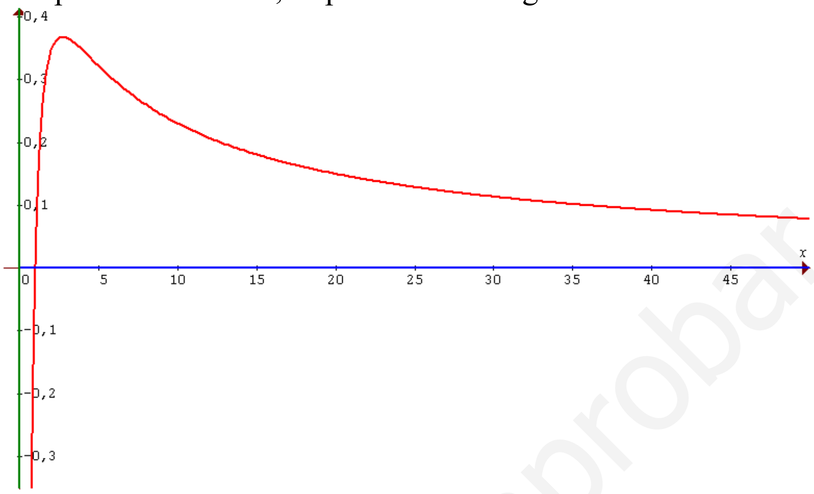
Por tanto, la recta $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la función.
Veamos si existen asíntotas horizontales:

$\underset{x\to+\infty}{Lim}\dfrac{\text{Ln}\,x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$, que es un límite indeterminado. Aplicamos la regla de L´Hopital para resolverlo:

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{\text{Ln}\,x}{x}=\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\underset{x\to+\infty}{Lim}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Por tanto existe **asíntota horizontal** cuando $x\to+\infty$ y esta es las recta $y = 0$.
Como hay asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas, puesto que estas son excluyentes.

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función:



Representa gráficamente la función $y = x+\sqrt[3]{x^2}$.

I) **Dominio**
Se trata de una función en la que aparece una raíz cúbica. Por tratarse de una raíz de índice impar no habrá ningún problema al calcularla y por tanto su dominio es todo $\mathbb{R}$.

$$Dom\,f(x)=\mathbb{R}$$

II) **Cortes con los ejes**
Corte con OX: Se hace $y = 0$ y calculamos los correspondientes valores de x.

$0=x+\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow -x=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow (-x)^3=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 \Rightarrow -x^3=x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3+x^2=0 \Rightarrow x^2\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$ Raíces: $x = 0$ (doble) y $x = -1$

Por tanto los puntos de corte son (–1, 0) y (0, 0).
Corte con OY: Se hace $x = 0$ y calculamos los correspondientes valores de y.

$y=0+\sqrt[3]{0^2}=0 \Rightarrow$ Por tanto el punto de corte es (0, 0).

III) **Simetrías**

$$f(-x)=(-x)+\sqrt[3]{(-x)^2}=-x+\sqrt[3]{x^2}$$

Como se observa $f(x)\neq f(-x)$ y además $f(-x)\neq -f(x)$, y por tanto la función no es ni par ni impar.

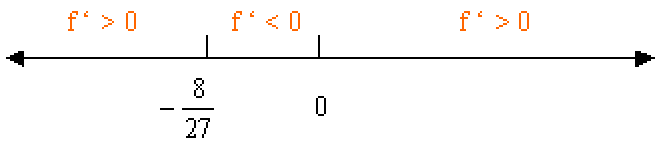
IV) **Periodicidad**
La función **no** es periódica.

V) **Monotonía**

Calculemos la derivada primera: $f\,'(x) = 1 + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Para calcular los puntos singulares se resuelve la ecuación $f\,'(x) = 0$.

$$1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad \text{Raíz: } x = -\frac{8}{27}$$

Pero además debemos tener en cuenta el punto $x = 0$, pues en él la función no es derivable.
Así:



Por tanto, es **creciente** en $\left(-\infty, -\dfrac{8}{27}\right) \cup (0, +\infty)$.

Es **decreciente** en $\left(-\dfrac{8}{27}, 0\right)$.

VI) **Extremos relativos**

Calculemos $f\,''(x)$:

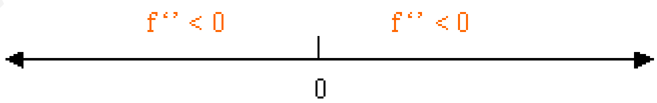
$$f\,''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$f\,''\left(-\dfrac{8}{27}\right) < 0$, y por tanto hay un **máximo** en $\left(-\dfrac{8}{27}, \dfrac{4}{27}\right)$.

Por otra parte, como se dijo anteriormente, también debemos estudiar el punto $x = 0$. En este caso, el estudio lo haremos a través de la monotonía. Como se puede observar, en el intervalo $\left(-\dfrac{8}{27}, 0\right)$ la función es decreciente, mientras que en el intervalo $(0, +\infty)$ es creciente. Por tanto hay un **mínimo** en el punto $(0, 0)$.

VII) **Curvatura**

Para estudiar la curvatura, resolvamos primero la ecuación $f\,''(x) = 0$. Esta no tiene raíces, pero se puede observar fácilmente que no existe para $x = 0$, y por tanto debemos tener en cuenta dicho punto. Así:



Por tanto, es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

VIII) **Puntos de inflexión**

Como ya sabemos la función es siempre cóncava, esto es, no cambia su curvatura y por tanto no tiene puntos de inflexión.

IX) **Asíntotas**

Por ser Dom $f(x) = \mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales.

Veamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(x + \sqrt[3]{x^2}\right) = \infty$$

Por tanto no hay asíntotas horizontales.

Veamos por último si hay asíntotas oblicuas ($y = mx + n$):

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[(x + \sqrt[3]{x^2}) - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^2} \right] = \infty$$

Como el límite que determina n es infinito, no existe la **asíntota oblicua**.^

Resumiendo todos los puntos anteriores, se puede trazar la gráfica de la función: