Tiro oblicuo

Una moto de agua que va a 60 km/h salta con un ángulo de 15° sobre el mar.

a) ¿Qué distancia saltará?

b) ¿Qué altura máxima alcanzará la moto sobre el mar?

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s y con un ángulo de 40° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a) Distancia de la base de la casa a que caerá el agua. Resultado: x=52.7 m

b) Velocidad a que el agua llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}=15.32\ \vec{i}\ -21.6\ \vec{j}$ (m/s)

Desde el tejado de una casa que está a 15 m de altura lanzamos una pelota a 30 m/s y con un ángulo de 35° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a- Distancia de la base de la casa a que caerá la pelota. Resultado: x=101.9 m

b- Velocidad a que la pelota llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}=24.5\ \vec{i}\ -24.4\ \vec{j}$

c- ¿Dónde estará para t= 2s? Resultado: $\vec{r}=49\ \vec{i}\ +29.4\ \vec{j}$

Desde la ventana de una casa que está a 40 m de altura lanzamos un balón con una velocidad de 30 m/s y un ángulo de 35º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) En qué punto chocará contra la pared de la casa de enfrente, que está a 20 de distancia horizontal Resultado: punto (50.65, 20), en metros

b) La velocidad con que choca contra la pared. Resultado: $\vec{v}=24.57\ \vec{i}\ + 9.1\ \vec{j}$ (m/s)

Desde la cima de una colina que está a 60 m de altura lanzamos un proyectil con una velocidad de 500 m/s y un ángulo de 30º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) El punto donde llegará el proyectil al suelo.Resultado: punto (21754, 0), en metros

b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}=433\ \vec{i}\ - 252.4\ \vec{j}$

c) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}=10825\ \vec{i}+ 3185\ \vec{j}$

Lanzamos desde el suelo una pelota con un ángulo de 45° y queremos colarla en una cesta que está a 7 m de distancia horizontal y a 3.5 m de altura.

Calcular con qué velocidad hay que lanzarla.

Resultado: $|v_0|$=11.78 m/s, $\vec{v}= 8.33\ \vec{i}\ + 8.33\ \vec{j}$ (m/s)

37) Un atleta quiera batir el record del mundo de lanzamiento de peso, establecido en 23,0 m. Sabe que el alcance máximo lo consigue lanzando con un angulo de 45°. Si impulsa el peso desde una altura de 1,75 , ¿con que velocidad mínima debe lanzar?

Resultado: $|\vec{v_0}|$= 14,47 m/s

Una manguera lanza agua horizontalmente a una velocidad de 10 m/s desde una ventana situada a 15 m de altura. ¿A qué distancia de la pared de la casa llegará el chorro de agua al suelo?

Resultado: x= 18,1 m

Una bola que rueda sobre una superficie horizontal situada a 20 m de altura sobre el suelo cae y llega al suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 15 m medida desde la base de la superficie. Hallar:

a) La velocidad inicial de la bola en el momento de saltar. Resultado: $\vec{v_0}= 7,42\ \vec{i}$ (m/s)

b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}= 7,42\ \vec{i}\ - 19,8\ \vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por encima de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=15,83\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v} = 6,49\ \vec{i} - 20,16\ \vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por debajo de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=10,97\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v} = 6,49\ \vec{i} - 20,31\ \vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 50 m de altura con un ángulo de 45° por encima de la horizontal y una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}=45,81\ \vec{i} + 72,9\ \vec{j}$ (m)

b) La posición y la velocidad de la bola cuando está a 60 m de altura.

Resultado: punto 1 $\vec{r}=11,45\ \vec{i} + 60\ \vec{j}$ (m) $\vec{v} = 21,21\ \vec{i} + 15,92\ \vec{j}$ (m/s)

punto 2 $\vec{r}=80,38\ \vec{i} + 60\ \vec{j}$ (m) $\vec{v} = 21,21\ \vec{i} - 15,93\ \vec{j}$ (m/s)

Una rueda de 30 cm de radio que estaba detenida se pone a girar verticalmente hasta alcanzar 480 rpm en 15 s. En el momento t=10 s salta un pedazo del borde de la rueda con un ángulo de 40°.

Calcular a qué distancia del punto de partida caerá. Resultado: 10 m

El agua de una manguera de los bomberos sale con una velocidad de 25 m/s. Suponiendo que no hay rozamiento con el aire, calcular:

a) La altura máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = + 31,25\ \vec{j}$ (m)

b) La distancia horizontal máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = 62,5\ \vec{i}$ (m)

Calcula la máxima anchura de zanja que puede saltar en horizontal un corredor de parcour (o un saltador de longitud) que alcanza los 10 m/s y salta con un ángulo de 45°.

(Resultado: x = 9,97 m)

Un saltador es capaz de correr a 10 m/s. Calcula dónde cae si salta con:

a) Un ángulo de 30°. Resultado: $\vec{r} = 8,66\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

b) Un ángulo de 45°. Resultado: $\vec{r} = 10\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

c) Un ángulo de 60°. Resultado: $\vec{r} = 8,66\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

Se lanza una piedra desde el borde de un acantilado sobre el mar de 40 m de altura, con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula:

a) El vector velocidad con que entrará en el agua expresado en la forma vectorial ($a\ \vec{i} + b\ \vec{j}$)

Resultado: $\vec{v} = 12,85\ \vec{i} - 32,17\ \vec{j}$ (m/s)

b) La altura máxima que alcanzará y la velocidad en ese punto.

Resultado: $\vec{r} = 51,74\ \vec{j}$ (m) ; $\vec{v} = 12,85\ \vec{i}$ (m/s)

Una moto de agua que va a 60 km/h salta con un ángulo de 15° sobre el mar.

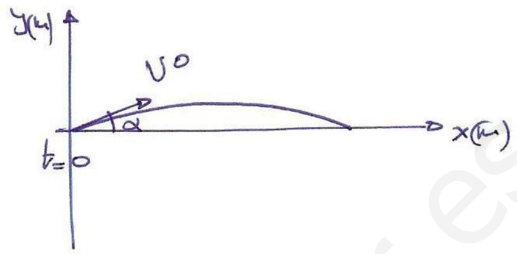
a) ¿Qué distancia saltará?

b) ¿Qué altura máxima alcanzará la moto sobre el mar?

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$V_0 = 60 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = 16{,}66\ m/s$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha = 16{,}66 \cos 15 = 16{,}1\ m/s$

$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha = 16{,}66 \cdot \operatorname{sen} 15 = 4{,}31\ m/s$

$y_0 = 0$

$x_0 = 0$

$a_y = -9{,}8\ m/s^2$

Cuestiones

a) Para calcular la posición x del punto de caída, necesitamos calcular el tiempo que tarda en volver al agua. Sabemos que en ese punto $y = 0$ luego, aplicando la función de la posición vertical y:

$y = \frac{1}{2}at^2 + V_{0y}t + y_0$ $\quad 0 = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 4{,}31t + 0$

$(-4{,}9t + 4{,}31)t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ -4{,}9t + 4{,}31 = 0 \end{cases}$; $\quad t = \frac{-4{,}31}{-4{,}9} = 0{,}88\ s$

$x = 16{,}1 \cdot 0{,}88 + 0 = 14{,}17\ m$

Saltará 14,17 m y caerá en el punto $14{,}17\vec{i} + 0\vec{j}$ (m)

b) Para calcular la altura máxima necesitamos conocer el tiempo en ese punto, del que sabemos que $v_y = 0$

$0 = 4{,}31 + (-9{,}8)t$; $\quad t = \frac{-4{,}31}{-9{,}8} = 0{,}44\ s$

Por tanto $y = \frac{1}{2}(-9{,}8) \cdot (0{,}44)^2 + 4{,}31(0{,}44) + 0 = -0{,}95 + 1{,}90 = 0{,}95\ m$

El punto más alto estará en $(7{,}1\vec{i} + 0{,}95\vec{j})$ (m)

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s y con un ángulo de 40° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

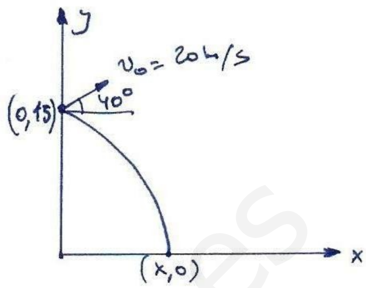
a) Distancia de la base de la casa a que caerá el agua. Resultado: x=52.7 m

b) Velocidad a que el agua llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}=15.32\,\vec{i}-21.6\,\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro parabólico sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{oy}t + y_o$

$x = v_{ox}t + x_o$

$v_y = v_{oy} + at$

$v_x = v_{ox}$

$a_y = -10\,m/s^2$

$v_{oy} = 20 \operatorname{sen} 40 = 12{,}85\,m/s$

$v_{ox} = 20 \cos 40 = 15{,}32\,m/s$

$y_o = 15\,m$

$x_o = 0$

$y = -5t + 12{,}85t + 15$

$x = 15{,}32\,t$

$v_y = -10t + 12{,}85$

$v_x = 15{,}32$

Cuestiones

a) en el suelo, $y = 0$

$0 = -5t^2 + 12{,}85t + 15$

$t = \frac{-12{,}85 \pm \sqrt{(12{,}85)^2 - 4(-5)\cdot 15}}{2(-5)} =$

$= \frac{-12{,}85 \pm 21{,}56}{-10} = \begin{cases} 3{,}44\,s \\ -0{,}87 \end{cases}$

$x = 15{,}32 \cdot 3{,}44 =$

$= 52{,}7\,m$

Aplicando t en el suelo a la función v_y y a v_x

b) $\vec{v}_y = -10\cdot 3{,}44 + 12{,}8 = -21{,}6\,\vec{j}$ (m/s)

$\vec{v}_x = 15{,}32\,\vec{i}$ (m/s) $\quad -21{,}6\,\vec{j}$ (m/s)

$\vec{v} = 15{,}32\,\vec{i} - 21{,}6\,\vec{j}$ (m/s)

c) - aumentando el ángulo hasta 45°
- aumentando v_o
- aumentando y_o

Desde el tejado de una casa que está a 15 m de altura lanzamos una pelota a 30 m/s y con un ángulo de 35° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a- Distancia de la base de la casa a que caerá la pelota. Resultado: x=101.9 m

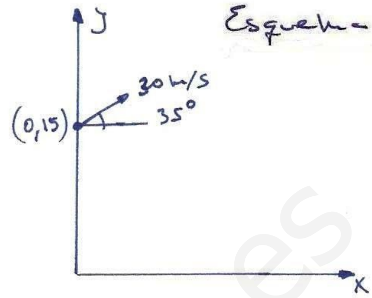
b- Velocidad a que la pelota llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}=24.5\,\vec{i}-24.4\,\vec{j}$

c- ¿Dónde estará para t= 2s? Resultado: $\vec{r}=49\,\vec{i}+29.4\,\vec{j}$

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$y=\frac{1}{2}at^2+v_{0y}t+y_0$

$x=v_{0x}t+x_0$

$v_y=v_{0y}+at$

$v_x=v_{0x}$

$a_y=-10\,m/s^2$

$v_{0y}=30\,\text{sen}\,35°=17{,}20\,m/s$

$v_{0x}=30\cos 35°=24{,}5\,m/s$

$y_0=15\,m$

$x_0=0$

$y=-5t^2+17{,}20t+15$

$x=24{,}5t$

$v_y=-10t+17{,}20$

$v_x=24{,}5$

Cuestiones

a) en el suelo $y=0$

$0=-5t^2+17{,}20t+15$

$t=\frac{-17{,}20\pm\sqrt{(17{,}20)^2-4\cdot(-5)\cdot 15}}{2(-5)}=$

$=\frac{-17{,}20\pm 24{,}41}{-10}=$ 4,16 s

$x=24{,}5\cdot 4{,}16=101{,}9\,m$

b) Aplicando t en el suelo a v_y y a v_x:

$v_y=-10\cdot 4{,}16+17{,}20=-24{,}4\,m/s$

$v_x=24{,}5\,m/s$

$\vec{v}=24{,}5\,\vec{i}-24{,}4\,\vec{j}\;\;m/s$

c) Aplicando $t=2s$ a las funciones x e y:

$y=-5\cdot 2^2+17{,}20\cdot 2+15=$

$=-20+34{,}4+15=29{,}4\,m$

$x=24{,}5\cdot 2=49\,m$

El vector posición cuando $t=2s$ será: $\vec{r}_{2s}=49\,\vec{i}+29{,}4\,\vec{j}\;\;m$

Desde la ventana de una casa que está a 40 m de altura lanzamos un balón con una velocidad de 30 m/s y un ángulo de 35º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

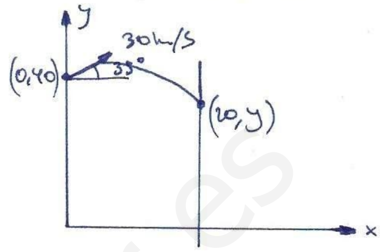
a) En qué punto chocará contra la pared de la casa de enfrente, que está a 20 de distancia horizontal Resultado: punto (50.65, 20), en metros

b) La velocidad con que choca contra la pared. Resultado: $\vec{v}=24.57\,\vec{i} + 9.1\,\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{oy}t + y_o$$
$$x = v_{ox}t + x_o$$
$$v_y = v_{oy} + at$$
$$v_x = v_{ox}$$

$a_y = -10\ m/s^2$

$v_{oy} = 30 \text{ sen } 35 = 17{,}20\ m/s$

$v_{ox} = 30 \cos 35 = 24{,}57\ m/s$

$y_o = 40\ m$

$x_o = 0$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} y &= -5t^2 + 17{,}20t + 40 \\ x &= 24{,}57t \\ v_y &= -10t + 17{,}20 \\ v_x &= 24{,}57 \end{aligned}$$

Cuestiones

a) Al chocar contra la pared, $x = 20\ m$.

Aplicándolo a la función x:

$$20 = 24{,}57t$$
$$t = \frac{20}{24{,}57} = 0{,}81\ s$$

Aplicando este tiempo a la función y:

$$y = -5(0{,}81)^2 + 17{,}20\cdot(0{,}81) + 40 = 50{,}65\ m$$

b) $v_x = 24{,}57\ m/s$

$v_y = -10\cdot 0{,}81 + 17{,}20 = 9{,}1\ m/s$

$\vec{v} = 24{,}57\,\vec{i} + 9{,}1\,\vec{j}$

Aplicando $t = 0{,}81\ s$ a las funciones v_x y v_y:

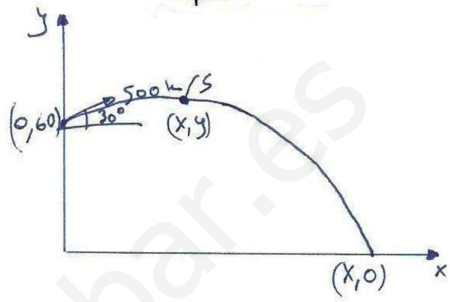
Desde la cima de una colina que está a 60 m de altura lanzamos un proyectil con una velocidad de 500 m/s y un ángulo de 30º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) El punto donde llegará el proyectil al suelo. Resultado: punto (21754, 0), en metros
b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}=433\,\vec{i} - 252.4\,\vec{j}$
c) La posición del punto más alto de la trayectoria Resultado: $\vec{r}=10825\,\vec{i} + 3185\,\vec{j}$

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro parabólico sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$$
$$x = v_{0x}t + x_0$$
$$v_y = v_{0y} + at$$
$$v_x = v_{0x}$$

$a_y = -10\,m/s^2$
$v_{0y} = 500 \operatorname{sen} 30 = 250\,m/s$
$v_{0x} = 500 \cos 30 = 433\,m/s$
$y_0 = 60\,m$
$x_0 = 0$

$y = -5t^2 + 250t + 60$
$x = 433t$
$v_y = -10t + 250$
$v_x = 433\,m/s$

Cuestiones

a) En el suelo $y = 0$

$$0 = -5t^2 + 250t + 60$$
$$t = \frac{-250 \pm \sqrt{(250)^2 - 4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} = \frac{-250 \pm 252{,}4}{-10} = 50{,}24\,s$$
$$x = 433 \cdot t = 433 \cdot 50{,}24 = 21754\,m$$

b) $v_x = 433\,m/s$
$$v_y = -10 \cdot 50{,}24 + 250 = -252{,}4\,m/s$$
$$\vec{v} = 433\,\vec{i} - 252{,}4\,\vec{j}\ \ m/s$$

c) En el punto más alto, $v_y = 0$

$$0 = -10t + 250\,;\ +10t = 250$$
$$t = \frac{250}{10} = 25\,s$$

$$y = -5(25)^2 + 250 \cdot 25 + 60 = -3125 + 6250 + 60 = 3185\,m$$
$$x = 433 \cdot 25 = 10825\,m$$
$$\vec{r}_{25} = 10825\,\vec{i} + 3185\,\vec{j}\ \ m$$

Lanzamos desde el suelo una pelota con un ángulo de 45° y queremos colarla en una cesta que está a 7 m de distancia horizontal y a 3.5 m de altura.

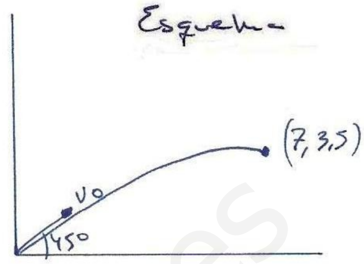
Calcular con qué velocidad hay que lanzarla.

Resultado: $|v_0|=11.78$ m/s, $\vec{v}= 8.33\,\vec{i} + 8.33\,\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{oy}t + y_o$$
$$x = v_{ox}t + x_o$$
$$v_y = v_{oy} + at$$
$$v_x = v_{ox}$$

$a_y = -10\, m/s^2$

$v_{ox} = v_0 \cos 45$ m/s

$v_{oy} = v_0 \operatorname{sen} 45$ m/s

$y_o = 0$

$x_o = 0$

$$\left.\begin{aligned} y &= -5t^2 + v_0\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ x &= v_0\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ v_y &= -10t + v_0\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_x &= v_0\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Cuestiones

Tomando las ecuaciones y y x

$$y = -5t^2 + x$$

aplicando al punto (7, 3,5)

$$3{,}5 = -5t^2 + 7 \; ; \; 5t^2 = 7 - 3{,}5 = 3{,}5$$
$$t = \sqrt{3{,}5/5} = 0{,}84\, s$$

$$v_0 = x\frac{2}{\sqrt{2}t} = \frac{7\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 0{,}84} = 11{,}78\, m/s$$

$$\vec{v} = 11.78\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 11.78\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} =$$
$$= 8{,}33\,\vec{i} + 8.33\,\vec{j} \quad m/s$$

Un atleta quiera batir el record del mundo de lanzamiento de peso, establecido en 23,0 m. Sabe que el alcance maximo lo consigue lanzando con un angulo de 45°. Si impulsa el peso desde una altura de 1,75 , ¿con que velocidad mínima debe lanzar?

Resultado: $|\vec{v_0}|$= 14,47 m/s

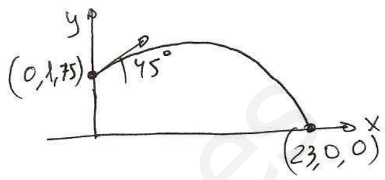
Hipótesis y modelo.

– Objeto puntual

– Rozamiento despreciable

– Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema



Funciones

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \qquad x_0 = 0 \qquad y = \frac{1}{2}(-9,8)t^2 + v_0 \operatorname{sen} 45 + 1,75$$

$$x = v_{0x}t + x_0 \qquad y_0 = 1,75\,m \qquad x = v_0 \cos 45 \cdot t$$

$$v_y = v_{0y} + at \qquad v_{0x} = v_0 \cos 45 \qquad v_y = -9,8t + v_0 \operatorname{sen} 45$$

$$v_x = v_{0x} \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 45 \qquad v_x = v_0 \cos 45$$

$$a = -9,8\,m/s^2$$

Para alcanzar el punto (23, 0) aplicamos estos valores a las funciones de x e y.

$$23 = v_0 \cos 45 \cdot t \quad ; \quad t = \frac{23}{v_0 \cos 45}$$

$$0 = -4,9t^2 + v_0 \operatorname{sen} 45 t + 1,75$$

Como $v_0 = \dfrac{23}{t \cos 45}$

$$0 = -4,9t^2 + \frac{23 \cancel{\operatorname{sen} 45}}{\cancel{t} \cancel{\cos 45}} \cancel{t} + 1,75$$

$$0 = -4,9t^2 + 24,75 \quad ; \quad t = \sqrt{\frac{-24,75}{-4,9}} = \sqrt{5,05} = 2,25\,s$$

Aplicando este tiempo a la función x $\quad v_0 = \dfrac{23}{2,25 \cdot \cos 45} = 14,47\,m/s$

Una manguera lanza agua horizontalmente a una velocidad de 10 m/s desde una ventana situada a 15 m de altura. ¿A qué distancia de la pared de la casa llegará el chorro de agua al suelo?

Resultado: x= 18,1 m

Suponemos un tiro horizontal con rozamiento despreciable

Funciones y parámetros

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_x = v_{0x}$

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$a_y = -9{,}8\ m/s^2$

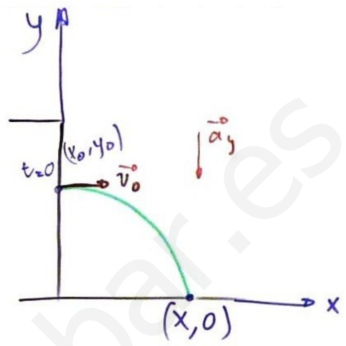
$v_{0x} = 10\ m/s$

$v_{0y} = 0$

$x_0 = 0$

$y_0 = 15m$

Esquema



Cálculo del tiempo de caída.

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 0\,t + 15$

Cuando $y = 0$

$0 = \frac{1}{2}(-9{,}8)\,t^2 + 15$; $0 = -4{,}9t^2 + 15$

$t^2 = \frac{-15}{-4{,}9}$; $t = \pm\sqrt{\frac{-15}{-4{,}9}} = \pm\ 1{,}81\ s$

Cálculo de la distancia de caída

$x = 10 \cdot t + 0$

Para $t = 1{,}81 s$

$x = 10 \cdot 1{,}81 = 18{,}1\ m$

Una bola que rueda sobre una superficie horizontal situada a 20 m de altura sobre el cuelo cae y llega al suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 15 m medida desde la base de la superficie. Hallar:

a) La velocidad inicial de la bola en el momento de saltar. Resultado: $\vec{v_0}$ = 7,42 $\vec{i}$ (m/s)

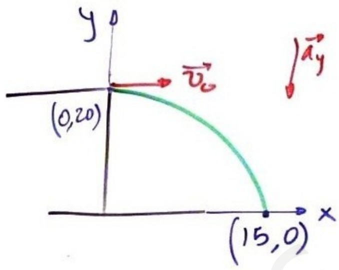
b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$ = 7,42 $\vec{i}$ - 19,8 $\vec{j}$ (m/s)

Suponemos un tiro horizontal con un objeto puntual y sin rozamiento con el aire

Funciones y parámetros

$x = v_{0x}t + x_0$	$a_y = -9{,}8\ m/s^2$
$v_x = v_{0x}$	$v_{0x} =$
$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0$	$v_{0y} = 0$
$v_y = a_y t + v_{0y}$	$x_0 = 0$
	$y_0 = 20m$

Esquema



Sabemos que $x = 15m$ cuando $y = 0m$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 0t + 20 \\ x = V_{0x}t + 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 0 = -4{,}9t^2 + 20 \\ 15 = V_{0x}t \end{array}\right\}$$

$$t = \frac{15}{V_{0x}} \quad ; \quad 0 = -4{,}9\left(\frac{15}{V_{0x}}\right)^2 + 20$$

$$0 = -4{,}9 \cdot \frac{15^2}{V_{0x}^2} + 20 \quad ; \quad -20 = -4{,}9 \cdot \frac{15^2}{V_{0x}^2}$$

$$20V_{0x}^2 = 4{,}9 \cdot 15^2 \ ; \ V_{0x} = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 15^2}{20}} = 7{,}42\ m/s$$

Cálculo del tiempo de caída

$$y = \frac{1}{2}at^2 + V_{0y}t + y_0$$

$$0 = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 0 \cdot t + 20$$

$$-20 = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2$$

$$\frac{2(-20)}{-9{,}8} = t^2 \qquad t = 2{,}02\ s$$

$$v_y = (-9{,}8) \cdot 2{,}02 + 0 = -19{,}8\ m/s$$

$$v_x = 7{,}42\ m/s^2$$

$$\vec{v} = 7{,}42\,\vec{i} - 19{,}8\,\vec{j}\ \ (m/s)$$

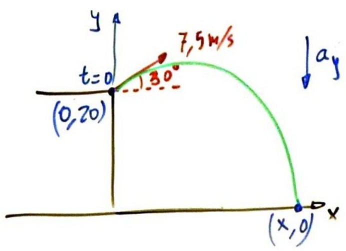
Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por encima de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=15{,}83\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}= 6{,}49\ \vec{i} - 20{,}16\ \vec{j}$ (m/s)

– Suponemos un objeto puntual y sin rozamiento con el aire

– Es un tiro oblicuo parabólico.



Funciones

$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -9{,}8\ m/s^2$

$v_{0x} = 7{,}5 \cos 30 = 6{,}49\ m/s$

$v_{0y} = 7{,}5 \ \text{sen}\ 30 = 3{,}75\ m/s$

$x_0 = 0$

$y_0 = 20\ m$

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 3{,}75t + 20$ función general

a) En el suelo, $y = 0$

$0 = -4{,}9t^2 + 3{,}75t + 20$

$t = \frac{-3{,}75 \pm \sqrt{(3{,}75)^2 - 4\cdot(-4{,}9)\cdot 20}}{2(-4{,}9)} = \frac{-3{,}75 \pm \sqrt{406{,}06}}{-9{,}8} =$

$= \frac{-3{,}75 \pm 20{,}15}{-9{,}8} = \begin{cases} 2{,}44\ s \\ \cancel{-1{,}67\ s} \end{cases}$

La distancia de caída x es

$x = 6{,}49t + 0$

para $t = 2{,}44\ s$

$x = 6{,}49 \cdot 2{,}44 = 15{,}83\ m$

El objeto cae en $(15{,}83, 0)$ (m)

b) Calculamos v_x y v_y para $t = 2{,}44\ s$ y las sumamos.

$v_x = 6{,}49\ m/s$

$v_y = (-9{,}8)\cdot 2{,}44 + 3{,}75 = -20{,}16\ m/s$

La velocidad de llegada al suelo es

$\vec{v} = 6{,}49\ \vec{i} - 20{,}16\ \vec{j}$ (m/s)

$|\vec{v}| = \sqrt{(6{,}49)^2 + (-20{,}16)^2} = 21{,}18\ m/s$

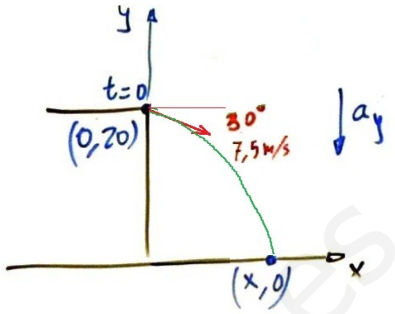
Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por debajo de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=10,97\ \vec{i} + 0\ \vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}= 6,49\ \vec{i} - 20,31\ \vec{j}$ (m/s)

– Suponemos un objeto puntual y sin rozamiento con el aire

– Es un tiro oblicuo parabólico.



Funciones

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{oy} t + y_0$$

$$x = v_{ox} t + x_0$$

$$v_y = a_y t + v_{oy}$$

$$v_x = v_{ox}$$

$$a_y = -9,8\ m/s^2$$

$$v_{ox} = 7,5 \cos 30 = 6,49\ m/s$$

$$v_{oy} = -7,5 \operatorname{sen} 30 = -3,75\ m/s$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 20m$$

$$y = \frac{1}{2}(-9,8)\, t^2 - 3,75\, t + 20 \quad \text{función general}$$

En el suelo $0 = -4,9 t^2 - 3,75 t + 20$

$$t = \frac{+3,75 \pm \sqrt{(-3,75)^2 - 4\cdot(-4,9)\cdot 20}}{2(-4,9)} = \frac{+3,75 \pm \sqrt{406,06}}{-9,8} =$$

$$= \frac{+3,75 \pm 20,15}{-9,8} = \begin{cases} 1,69\ s \\ -2,44\ s \end{cases}$$

La distancia x de caída es

$x = 6,49\, t + 0$ para $t = 1,69\ s$

$x = 6,49 \cdot 1,69 = 10,97\ m$

El objeto cae en $(10,97\ ,0)$ (m)

b) Calculamos v_x y v_y para $t = 1,69\ s$ y las sumamos.

$v_x = 6,49\ m/s$

$v_y = (-9,8)\ 1,69 - 3,75 = -20,31\ m/s$

La velocidad de llegada al suelo es

$$\vec{v} = 6,49\, \vec{i} - 20,31\, \vec{j} \quad (m/s)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(6,49)^2 + (-20,31)^2} = 21,32\ m/s$$

Lanzamos una bola desde un punto situado a 50 m de altura con un ángulo de 45° por encima de la horizontal y una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}=45{,}81\,\vec{i} + 72{,}9\,\vec{j}$ (m)

b) La posición y la velocidad de la bola cuando está a 60 m de altura.

Resultado: punto 1 $\vec{r}=11{,}45\,\vec{i} + 60\,\vec{j}$ (m) $\vec{v}= 21{,}21\,\vec{i} + 15{,}92\,\vec{j}$ (m/s)

punto 2 $\vec{r}=80{,}38\,\vec{i} + 60\,\vec{j}$ (m) $\vec{v}= 21{,}21\,\vec{i} - 15{,}93\,\vec{j}$ (m/s)

- Suponemos un objeto puntual sin rozamiento con el aire.

Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\qquad a_y = -9{,}8\ m/s^2 \quad (x_0, y_0)$

$x = v_{0x} t + x_0$ $\qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 30 \operatorname{sen} 45 = 21{,}21\ m/s$

$v_y = a_y t + v_{0y}$ $\qquad v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 30 \cos 45 = 21{,}21\ m/s$

$y_0 = 50\ m$

$v_x = v_{0x}$ $\qquad x_0 = 0$

a) Posición del punto más alto de la trayectoria

Calculamos t en el punto más alto sabiendo que $v_y = 0$ en el punto más alto

$v_y = -9{,}8t + 21{,}21$

$0 = -9{,}8t + 21{,}21$

$\frac{-21{,}21}{-9{,}8} = t \quad ; t = 2{,}16\ s$

Calculamos x e y para $t = 2{,}16\ s$

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)(2{,}16)^2 + 21{,}21 \cdot 2{,}16 + 50 = -22{,}86 + 45{,}81 + 50 = 72{,}9\ m$

$x = 21{,}21 \cdot 2{,}16 + 0 = 45{,}81\ m$

El punto más alto está en $(45{,}81,\ 79{,}2)$ metros

b) Posición y velocidad cuando $y = 60\,m$

$$y = \frac{1}{2}(-9,8)\,t^2 + 21,21 \cdot t + 50$$

$$60 = -4,9t^2 + 21,21t + 50 \quad ; \quad 0 = -4,9t^2 + 21,21t + 50 - 60$$

$$0 = -4,9t^2 + 21,21t - 10$$

$$t = \frac{-21,21 \pm \sqrt{(21,21)^2 - 4(-4,9)(-10)}}{2(-4,9)} = \frac{-21,21 \pm \sqrt{450 - 196}}{-9,8} = \begin{cases} 0,54\,s \\ 3,79\,s \end{cases}$$

Hay dos puntos en que $y = 60\,m$.

Punto 1) $x = 21,21 \cdot 0,54 + 0 = 11,45\,m$ posición: $(11,45, 60)$ metros

$v_y = -9,8 \cdot 0,54 + 21,21 = 15,92\,m/s$ velocidad: $(21,21\,\vec{i} + 15,92\,\vec{j})\ m/s$

Punto 2) $x = 21,21 \cdot 3,79 + 0 = 80,38\,m$ posición $(80,38, 60)$ metros

$v_y = -9,8 \cdot 3,79 + 21,21 = -15,93\ m/s$ velocidad: $(21,21\,\vec{i} - 15,93\,\vec{j})\ m/s$

Una rueda de 30 cm de radio que estaba detenida se pone a girar verticalmente hasta alcanzar 480 rpm en 15 s. En el momento t=10 s salta un pedazo del borde de la rueda con un ángulo de 40°.

Calcular a qué distancia del punto de partida caerá. Resultado: 10 m

Suponemos un mcua en la rueda
y un tiro oblicuo sin rozamiento en el objeto que salta.

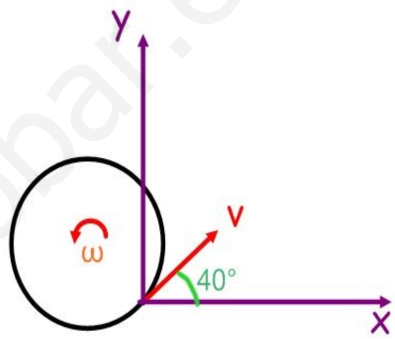
Funciones y parámetros

$w = \alpha t + w_0$ $\quad y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\quad r = 0{,}3\,m$

$v = w r$ $\quad x = v_{0x} t + x_0$ $\quad w = 480\,rpm$ para $t = 15\,s$ $\quad x_0 = 0$ $\quad a_y = -9{,}8\,m/s^2$

$v_y = a t + v_{0y}$ $\quad w_0 = 0$ $\quad y_0 = 0$ $\quad \varphi = 40°$

$v_x = v_{0x}$



a) Calculamos α para calcular w_{10} y conocer v

$$w_{15} = 480 \frac{vueltas}{min} \cdot \frac{1\,min}{60\,s} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\,vuelta} = \frac{480 \cdot 2\pi}{60} = 16\pi \frac{rad}{s}$$

$$w = \alpha t + w_0$$

$$16\pi = \alpha \cdot 15 + 0 \qquad \alpha = \frac{16\pi}{15}\ rad/s^2$$

Calculamos w para $t = 10\,s$

$$w = \alpha t + w_0$$

$$w = \frac{16}{15}\pi \cdot 10 + 0 = \frac{160}{15}\pi = 10{,}6\pi\ rad/s$$

Cálculo de la velocidad del borde para $t = 10\,s$

$$v = w r = 6\pi \left(\frac{rad}{s}\right) \cdot 0{,}3 (m) = 10{,}0\,m/s$$

Como $v_0 = 10\,m/s$ y $\varphi = 40°$

$$v_{0x} = v_0 \cos\varphi = 10 \cos 40° = 7{,}66\,m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\,\varphi = 10\,\text{sen}\,40° = 6{,}42\,m/s$$

Sabemos que cuando llegue al suelo $y = 0$

$$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)\,t^2 + 6{,}42\,t + 0$$

$$0 = -4{,}9\,t^2 + 6{,}42\,t \quad ; \quad 0 = (-4{,}9\,t + 6{,}42)\,t \qquad \begin{cases} t = 0 \\ -4{,}9\,t + 6{,}42 = 0 \\ t = \frac{-6{,}42}{-4{,}9} = 1{,}31\,s \end{cases}$$

La distancia horizontal será:

$$x = 7{,}66\,t + 0 = 7{,}66 \cdot 1{,}31 = 10{,}0\,m$$

El agua de una manguera de los bomberos sale con una velocidad de 25 m/s. Suponiendo que no hay rozamiento con el aire, calcular:

a) La altura máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = +\,31{,}25\,\vec{j}$ (m)

b) La distancia horizontal máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = 62{,}5\,\vec{i}$ (m)

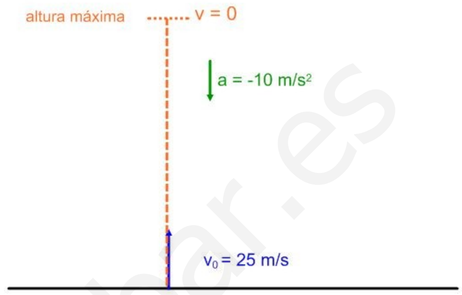
a) No hay rozamientos y suponemos tiro vertical

Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$ $\quad a = -10\ m/s^2$

$v = at + v_0$ $\quad v_0 = 25\ m/s$

$y_0 = 0$



En el punto más alto $v = 0$

$0 = -10t + 25$

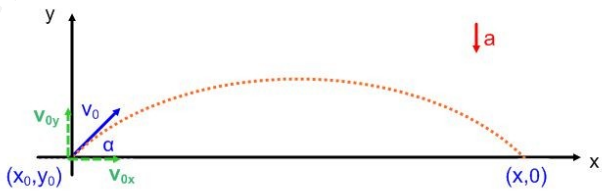
$t = \frac{-25}{-10} = 2{,}5\ s$

La altura será

$y = \frac{1}{2}(-10)(2{,}5)^2 + 25 \cdot 2{,}5 + 0 = 31{,}25\,m$

b) Para alcanzar la máxima distancia horizontal, el ángulo debe ser de 45°

Suponemos un tiro oblicuo sin rozamiento



Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2}a_y t + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\,m/s^2$

$v_{0y} = 25 \operatorname{sen} 45° = 17{,}68\,m/s$

$v_{0x} = 25 \cos 45° = 17{,}68\,m/s$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

Cuando llegue al suelo $y = 0$

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 17{,}68\,t + 0$

$-5t^2 + 17{,}68t = 0$

$(-5t + 17{,}68)t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 17{,}68 = 0 \end{cases}$

$t = \frac{-17{,}68}{-5} = 3{,}53\ s$

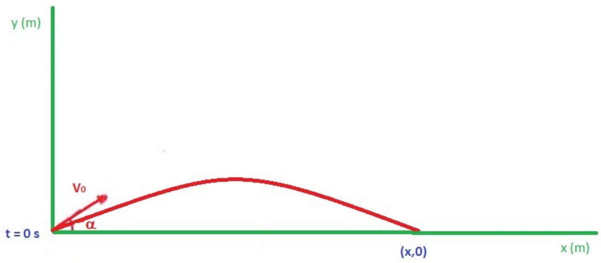
Sustituyendo este tiempo en la x:

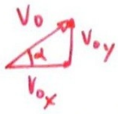
$x = 17{,}68 \cdot 3{,}53 + 0 = 62{,}5\ m$

45) Calcula la máxima anchura de zanja que puede saltar en horizontal un corredor de parcour (o un saltador de longitud) que alcanza los 10 m/s y salta con un ángulo de 45°.

(Resultado: x = 9,97 m)

Suponemos objeto puntual
Despreciamos rozamiento
Suponemos sistema plano y estático.





$\text{sen}\alpha = \frac{V_{0y}}{V_0}$

$\cos\alpha = \frac{V_{0x}}{V_0}$

funciones

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_0$

$v_x = v_{x0}$

parámetros

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha = 10 \cos 45 = 7{,}07 \text{ m/s}$

$V_{0y} = V_0 \,\text{sen}\alpha = 10 \,\text{sen} 45 = 7{,}07 \text{ m/s}$

$a_y = -10 \text{ m/s}^2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -5t^2 + 7{,}07t \\ x = 7{,}07t \\ v_y = -10t + 7{,}07 \\ v_x = 7{,}07 \text{ m/s} \end{array}\right.$$

Para calcular x de caída necesitamos calcular t en el punto de caída (y = 0)

$0 = -5t^2 + 7{,}07t$

$0 = (-5t + 7{,}07)\,t \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ -5t + 7{,}07 = 0 \end{array}\right. \qquad t = \frac{-7{,}07}{-5} = 1{,}41 \text{ s}$

En ese tiempo, calculamos x

$x = 7{,}07 \cdot 1{,}41 = 9{,}97 \text{ m}$

47) Un saltador es capaz de correr a 10 m/s. Calcula dónde cae si salta con:

a) Un ángulo de 30°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

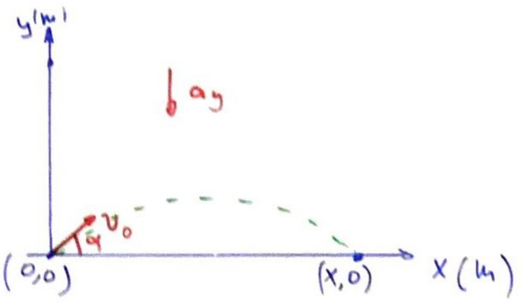
b) Un ángulo de 45°. Resultado: $\vec{r} = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

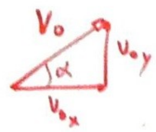
c) Un ángulo de 60°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

Suponemos objeto puntual

Despreciamos rozamiento

Suponemos sistema plano y estático.





Ecuaciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\quad v_{saltador} = v_0 = 10\,m/s$

$x = v_{0x} t + x_0$ $\quad a_y = -10\,m/s^2$

$v_y = a_y t + v_{0y}$ $\quad v_{0y} = V_0 \cdot sen\,\alpha$

$v_x = v_{0x}$ $\quad v_{0x} = V_0 \cdot cos\,\alpha$

$y_0 = 0$

$x_0 = 0$

a) Si $\alpha = 30°$; $v_{0y} = 10\,sen\,30° = 5\,m/s$

$v_{0x} = 10\,cos\,30 = 8{,}66\,m/s$

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0y} t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 5t + 0$; $-5t^2 + 5t = 0$; $t(-5t+5) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 5 = 0 \text{ ; } t = \frac{-5}{-5} = 1\,s \end{cases}$

Sustituyendo en x:

$x = v_{0x} t + x_0$

$x = 8{,}66 \cdot 1 + 0 = 8{,}66\,m$

b) Si $\alpha = 45^\circ$, $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 45^\circ = 7{,}07\ m/s$

$v_{0x} = 10 \cos 45^\circ = 7{,}07\ m/s$

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0y} t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10) t^2 + 7{,}07 t + 0$; $-5t^2 + 7{,}07 t = 0$; $t(-5t + 7{,}07) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 7{,}07 = 0 \text{ ; } t = \frac{-7{,}07}{-5} = 1{,}44\ s \end{cases}$

Sustituyendo en x :

$X = V_{0x} t + x_0$

$X = 7{,}07 \cdot 1{,}44 + 0 = 10\ m$

c) Si $\alpha = 60^\circ$, $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 60^\circ = 8{,}66\ m/s$

$v_{0x} = 10 \cos 60^\circ = 5\ m/s$

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0y} t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10) t^2 + 8{,}66 t + 0$; $-5t^2 + 8{,}66 t = 0$; $t(-5t + 8{,}66) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 8{,}66 = 0 \text{ ; } t = -\frac{8{,}66}{-5} = 1{,}73\ s \end{cases}$

Sustituyendo en x :

$X = V_{0x} t + x_0$

$X = 5 \cdot 1{,}73 = 8{,}65\ m$

48) Se lanza una piedra desde el borde de un acantilado sobre el mar de 40 m de altura, con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula:

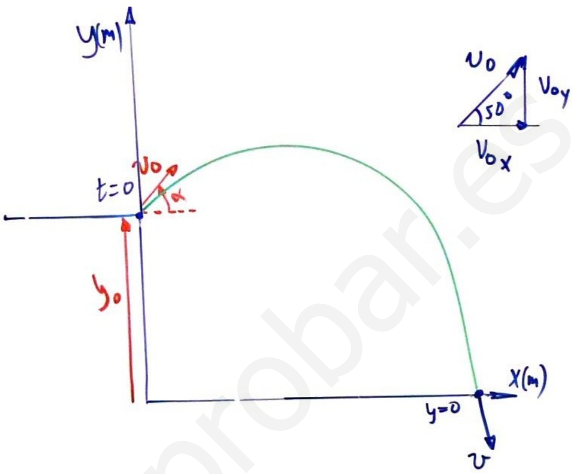
a) El vector velocidad con que entrará en el agua expresado en la forma vectorial ($a\vec{i} + b\vec{j}$)

Resultado: $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i} - 32{,}17\,\vec{j}$ (m/s)

b) La altura máxima que alcanzará y la velocidad en ese punto.

Resultado: $\vec{r} = 51{,}74\,\vec{j}$ (m) ; $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i}$ (m/s)

Suponemos un movimiento parabólico sin rozamiento con el aire, objeto puntual y superficie plana



Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$y_0 = 40\ m \quad x_0 = 0$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 20 \cos 50° = 12{,}85\ m/s$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 20 \operatorname{sen} 50° = 15{,}32\ m/s$

$a_y = -10\ m/s^2$

a) Calculamos t de llegada a altura 0 (y=0)

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 15{,}32t + 40$

$0 = -5t^2 + 15{,}32t + 40$

$t = \dfrac{-15{,}32 \pm \sqrt{(15{,}32)^2 - 4(-5)\cdot 40}}{2(-5)} = \dfrac{-15{,}32 \pm \sqrt{1034{,}17}}{-10} =$

$t_1 = -1{,}68\ s \quad ; \quad t_2 = 4{,}75\ s$

Aplicamos t_2 a v_y y a v_x :

$v_y = -10 \cdot 4{,}75 + 15{,}32 = -32{,}17\ m/s$

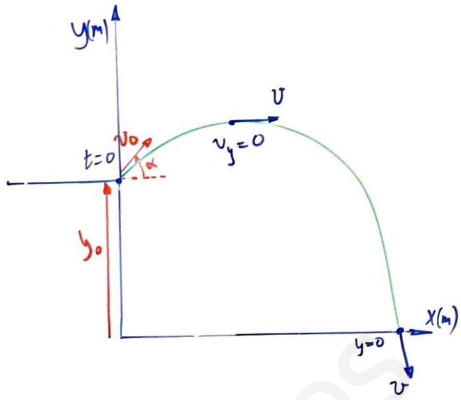
$v_x = v_{0x} = 12{,}85\ m/s$

$v = 12{,}85\,\vec{i} - 32{,}17\,\vec{j}\ (m/s)$

b) Calculamos t de llegada al punto más alto ($v_y = 0$)

$$0 = -10 \cdot t + 15,32$$

$$t = \frac{-15,32}{-10} = 1,53 \ s$$



La altura máxima es:

$$y = \frac{1}{2}(-10) \cdot (1,53)^2 + 15,32 \cdot 1,53 + 40 =$$

$$= -11,70 + 23,44 + 40 = 51,74 \ m$$

La velocidad vertical (v_y) es nula

$$v_x = v_{0x} = 12,85 \ m/s$$

En el punto más alto $\vec{v} = 12,85 \ \vec{i} \ (m/s)$