

$$\int x^5 dx$$

Solución

Aplicaremos la **propiedad** "una constante puede entrar o salir de la integral.

Sólo falta un 6 multiplicando en el integrando para tener la derivada de x^6 . Vamos a multiplicar y a dividir la integral por 6 para introducir un 6 en el radicando:

$$\begin{aligned}\int x^5 dx &= \frac{6}{6} \int x^5 dx = \\ &= \frac{1}{6} \int 6x^5 dx = \frac{1}{6} \cdot x^6 + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx$$

Solución

No tenemos que realizar ninguna operación para resolver esta integral porque e^x es la derivada de e^x . Sólo debemos acordarnos de escribir la constante de integración C .

$$\int e^x dx = e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2) dx$$

Solución

Aplicamos la **propiedad** de que la integral de la suma es la suma de las integrales. Así, podemos descomponer la integral como una suma de integrales más sencillas.

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2) dx = \int 3x^4 dx + \int x^2 dx + \int 2 dx$$

$$\begin{aligned}\int 3x^4 dx &= 3 \int x^4 dx = 3 \cdot \frac{5}{5} \int x^4 dx = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{5} \int 5x^4 dx = \frac{3}{5} \cdot x^5\end{aligned}$$

$$\int x^2 dx = \frac{3}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$$

$$\int 2 dx = 2 \int 1 dx = 2x$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2) dx = \frac{3}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{3} x^3 + 2x + C$$

$$\int (x + \sqrt{x}) dx$$

Solución

Como tenemos una suma en el integrando, podemos descomponer la integral como una suma integrales. Además, escribimos la raíz cuadrada como una potencia:

$$\begin{aligned}\int (x + \sqrt{x}) dx &= \int x dx + \int \sqrt{x} dx \\ \int x dx &= \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \\ \int x^{1/2} dx &= \frac{1/2 + 1}{1/2 + 1} \int x^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{1/2 + 1} \int (1/2 + 1) x^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{1/2 + 1} x^{1/2 + 1} = \frac{1}{3/2} x^{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} \\ \int (x + \sqrt{x}) dx &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{3/2} + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos 2x dx$$

Solución

Si escribimos un 2 en el integrando, tendremos la derivada del seno del ángulo doble:

$$\begin{aligned}\int \cos 2x dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{2}{3x + 2} dx$$

Solución

Normalmente, las integrales inmediatas de funciones racionales son la derivada de un logaritmo. Si no es así, tendremos que aplicar otros [métodos para integrales de funciones racionales](#).

El integrando será la derivada de un logaritmo si conseguimos escribir el numerador como la derivada del denominador. Para ello, en esta integral, debemos cambiar el 2 por un 3:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3x+2} dx &= 2 \int \frac{1}{3x+2} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{3x+2} \cdot 3 dx = \\ &= \frac{2}{3} \ln|3x+2| + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Nota: no hay que olvidar el valor absoluto del argumento del logaritmo porque éste no puede tomar valores no positivos.

$$\int e^{2x} dx$$

Solución

Introducimos un 2 en el integrando para que éste sea la derivada de e^{2x} :

$$\begin{aligned}\int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1-x} dx$$

Solución

Como es una función racional simple, su integral será un logaritmo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x} dx &= - \int \frac{1}{x-1} dx = \\ &= - \ln|x-1| + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{5x+3} dx$$

Solución

Introducimos un 5 en el integrando para convertirlo en la derivada de e^{5x+3} :

$$\begin{aligned}\int e^{5x+3} dx &= \frac{1}{5} \int 5e^{5x+3} dx = \\ &= \frac{1}{5} e^{5x+3} + C\end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$$

Solución

Lo primero que haremos es descomponer la integral en dos integrales. Después, escribiremos las raíces en forma de potencias para trabajar mejor con ellas.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx = \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{x\sqrt{x}}{4} dx$$

$$\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 3 \int x^{-1/2} dx =$$

$$= 3 \left(\frac{-1/2 + 1}{-1/2 + 1} \right) \int x^{-1/2} dx =$$

$$= \frac{3}{-1/2 + 1} \int (-1/2 + 1) x^{-1/2} dx =$$

$$= \frac{3}{1/2} \int (-1/2 + 1) x^{-1/2} dx =$$

$$= \frac{3}{1/2} \cdot x^{-1/2+1} = 6 \cdot x^{1/2} = 6\sqrt{x}$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int x\sqrt{x} dx = \frac{1}{4} \int x x^{1/2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot (3/2 + 1)} \int \left(\frac{3}{2} + 1 \right) x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot (5/2)} \int \frac{5}{2} x^{3/2} dx = \frac{2}{4 \cdot 5} \cdot x^{5/2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot x^{5/2} = \frac{1}{10} \cdot x^{5/2} = \frac{1}{10} \cdot x^2 \sqrt{x}$$

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10} \cdot x^2 \sqrt{x} =$$

$$= \left(6 - \frac{x^2}{10} \right) \sqrt{x} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$$

Solución

Vamos a escribir la raíz cuadrada en forma de potencia. De este modo, aplicando las propiedades de las potencias, el integrando será muy simple (una potencia).

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{2-1/2} dx = \int x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{3/2+1} \int (3/2+1)x^{3/2} dx =$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{5}{2} x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} =$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}} \right) dx$$

Solución

Primero, escribimos la integral como la suma de dos integrales. Después, escribimos la raíz 5-ésima en su forma de potencia. También, podemos escribir la exponencial en el numerador cambiando el signo de su exponente.

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx + \int \frac{5}{e^{3x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{1}{-1/5 + 1} \int \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{5}{4} \int \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{5}{4} x^{-1/5+1} = \frac{5}{4} x^{4/5}$$

$$\int \frac{5}{e^{3x}} dx = 5 \int \frac{1}{e^{3x}} dx =$$

$$= 5 \int e^{-3x} dx = \frac{-5}{3} \int -3e^{-3x} dx =$$

$$= -\frac{5}{3} e^{-3x} = -\frac{5}{3e^{3x}}$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}} \right) dx = \frac{5}{4} x^{4/5} - \frac{5}{3e^{3x}} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$$

Solución

Normalmente, escribir la *tangente* como el cociente del *seno* y del *coseno* facilita los cálculos. Al hacerlo, tendremos un cociente de funciones trigonométricas siendo el numerador la derivada del denominador.

$$\int \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx = \int \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} dx =$$

$$= -\sqrt{2} \int \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left[-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx =$$

$$= -\sqrt{2} \ln \left| \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 5 \right) dx$$

Solución

Como de costumbre, descomponemos la integral en tantas integrales como sumandos tiene el integrando.

Después, escribiremos la raíz como un potencia y aprovecharemos las propiedades de las potencias para simplificar los integrandos.

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 5 \right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx + \int 5 dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{1}{(-2+1)} \int (-2+1)x^{-2} dx =$$

$$= -1 \cdot \int (-2+1)x^{-2} dx =$$

$$= -x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{3/2}} dx = \int x^{-3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)} \int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2} dx =$$

$$= \frac{1}{-1/2} \int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2} dx =$$

$$= -2 \int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2} dx =$$

$$= -2x^{-3/2+1} = -2x^{-1/2} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 5 \right) dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 5x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$$

Solución

El integrando es, si le cambiamos el signo, la derivada de un coseno:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx &= \\ &= \int -\sin(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} dx = \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C \\ C &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

Solución

El integrando es la derivada del cuadrado del logaritmo entre 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx &= \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C \\ C &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$