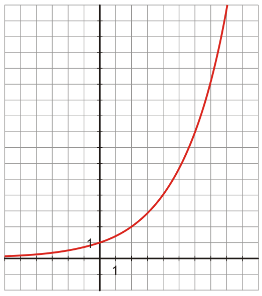
EJERCICIO 27 : **Representa las siguientes funciones haciendo en cada caso una tabla de valores:**

a) $y = 2^{0,5x}$ **b)** $y = -log_6 x$



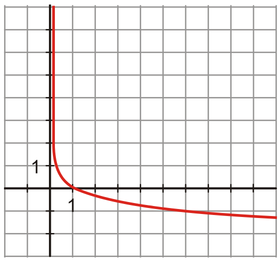
Solución:

a) $y = 2^{0,5x}$ equivale a $y = 2^{\frac{x}{2}}$

X	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	$+\infty$

Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

b)

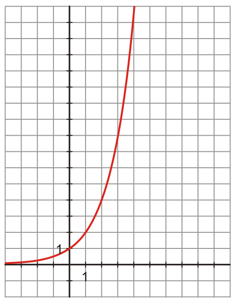


X	$6^{-\infty}$	6^{-2}	6^{-1}	6^{0}	6^{1}	6^{2}	$6^{+\infty}$
x	0^+	1/36	1/6	1	6	36	$+\infty$
y	$+\infty$	+2	1	0	-1	-2	$-\infty$

a) Pon en forma exponencial $4^{0,5x}$ y representa la función $y = 4^{0,5x}$.

b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = log_5 x$ los puntos $(-1, 2)$, $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$, (3,-2) y (25,2)

Solución:



a) $4^{0,5x} = \left(4^{0,5}\right)^x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$

Representar la función $y = 4^{0,5x}$ equivale a representar la función $y = 2^x$.

Hacemos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	$+\infty$

b) El dominio de definición de $y = log_5 x$ es $(0, +\infty)$, luego el punto $(-1, 2)$ no pertenece al dominio por ser $x = -1 < 0$. El resto de puntos tienen abscisa positiva, luego pueden pertenecer a la gráfica de la función:

$$\left.\begin{array}{l} (5,1) \rightarrow 1 = log_5 5 \rightarrow 5^1 = 5 \\ \left(\frac{1}{5}, -1\right) \rightarrow -1 = log_5 \frac{1}{5} \rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \text{Pertenecen a la gráfica.}$$

$(3, -2) \rightarrow -2 = log_5 3 \rightarrow 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \neq 3$ No pertenece a la gráfica.

$(25, 2) \rightarrow 2 = log_5 25 \rightarrow 5^2 = 25 \rightarrow$ Pertenece a la gráfica.

Los puntos que pertenecen a la gráfica son: $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$ y $(25, 2)$

a) Halla el valor de k y a para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Indica razonadamente si la función obtenida será creciente o decreciente, sin representarla.

b) Representa la función $y = 2 + log_7 x$.

Solución:

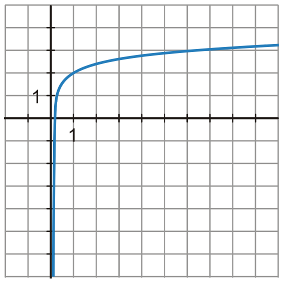
a) $y = ka^x$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = ka^{-1} \\ \dfrac{3}{4} = ka^2 \end{array}\right\} \dfrac{ka^2}{ka^{-1}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{6} \rightarrow a^3 = \dfrac{3}{24} \rightarrow a^3 = \dfrac{1}{8} \rightarrow a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 6 = k \cdot \dfrac{1}{a} \rightarrow k = 6a \rightarrow k = 6 \cdot \dfrac{1}{2} \rightarrow k = 3$$

La función es $y = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, función decreciente por ser $a = \dfrac{1}{2} < 1$.

b)

X	$7^{-\infty}$	7^{-2}	7^{-1}	7^0	7^1	7^2	$7^{+\infty}$
x	0	1/49	1/7	1	7	49	+∞
y	-∞	0	1	2	3	4	+∞



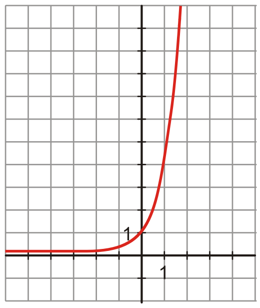
<u>EJERCICIO 30</u> : Escribe el dominio de la función $y = 4^x$ y represéntala gráficamente. Escribe la expresión analítica y representa la función inversa de $y = 4^x$.

Solución:

- $y = 4^x$ es una función exponencial $\rightarrow$ su dominio son todos los números reales.

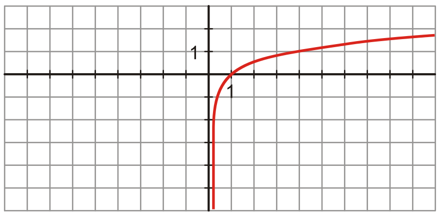
Hagamos una tabla de valores para representarla:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/16	¼	1	4	16	+∞



- La expresión analítica de la función inversa de $y = 4^x$ es $y = log_4 x$, cuya tabla de valores será:

X	0	1/16	¼	1	4	16	+∞
Y	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞



<u>EJERCICIO 31</u>

a) Construye la gráfica de $y = 0{,}7^x$ y, apartir de ella, representa la función $y = 0{,}7^x + 2$.

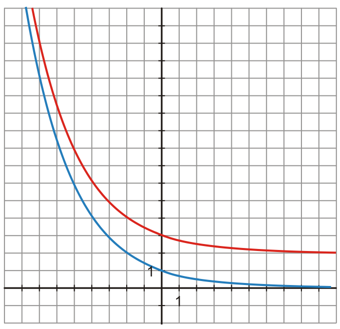
b) Indica cuál es el dominio de la función $y = log\ x$ y escribe tres puntos que pertenezcan a la gráfica.

Solución:

a) $y = 0{,}7^x$: función exponencial de base $a = 0{,}7 < 1$, luego decrece en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

- Hagamos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	2,0	1,43	1	0,7	0,49	0



La función $y = 0{,}7^x + 2$ se obtiene desplazando dos unidades hacia arriba la gráfica anterior, o lo que es igual, sumando 2 unidades a los valores obtenidos anteriormente para y.

b) $y = log_{10} x \quad \to \quad$ dominio de definición: $(0, +\infty)$

$(10, 1) \quad \to \quad 1 = log_{10} 10$

$(100, 2) \quad \to \quad 2 = log_{10} 100 \quad \to \quad 10^2 = 100$

$\left(\frac{1}{10}, -1\right) \quad \to \quad -1 = log_{10} \frac{1}{10} \quad \to \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$

<u>EJERCICIO 32</u> : Calcula, usando la definición de logaritmo, y sin calculadora:

a) $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_4 \frac{1}{64}$ **d)** $\log_5 \frac{1}{25}$ **e)** $\log_5 \sqrt[4]{5}$ **f)** $\log_5 25$

g) $\log_7 \sqrt[3]{49}$ **h)** $\log_2 512$ **i)** $\log_5 0{,}008$ **j)** $\log_2 \sqrt[4]{4}$ **k)** $\log_2 0{,}5$ **l)** $\log_2 256$

m) $\log \sqrt{0{,}01}$ **n)** $\log_6 \frac{5}{30}$ **ñ)** $\log_3 243$

Solución:

a) $log_3 \sqrt[5]{81} = log_3 \sqrt[5]{3^4} = log_3 3^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \underbrace{log_3 3}_{1} = \frac{4}{5}$

b) $log\ 0{,}001 = log\ 10^{-3} = -3 \underbrace{log\ 10}_{1} = -3$

c) $log_4 \frac{1}{64} = \underbrace{log_4 1}_{0} - log_4 64 = -log_4 4^3 = -3 \underbrace{log_4 4}_{1} = -3$

d) a) $log_5 \frac{1}{25} = \underbrace{log_5 1}_{0} - log_5 25 = -log_5 5^5 = -2 \underbrace{log_5 5}_{1} = -2$

e) b) $log_5 \sqrt[4]{5} = log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \underbrace{log_5 5}_{1} = \frac{1}{4}$

f) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3\ log_5 5 = 3$

g) a) $log_7 \sqrt[3]{49} = log_7 \sqrt[3]{7^2} = log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \underbrace{log_7 7}_{1} = \frac{2}{3}$

h) b) $log_2 512 = log_2 2^9 = 9 \cdot \underbrace{log_2 2}_{1} = 9$

i) c) $log_5 0{,}008 = log_5 \frac{8}{1000} = log_5 \frac{1}{125} = log_5 5^{-3} = -3 \underbrace{log_5 5}_{1} = -3$

j) a) $log_2 \sqrt[4]{4} = log_2 \sqrt[4]{2^2} = log_2 2^{\frac{2}{4}} = log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \underbrace{log_2 2}_{1} = \frac{1}{2}$

k) b) $log_2 0{,}5 = log_2 \frac{1}{2} = log_2 2^{-1} = -1 log_2 2 = -1$

l) c) $log_2 256 = log_2 2^8 = 8\ log_2 2 = 8$

m) a) $log \sqrt{0{,}01} = log \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log\ 10^{-2} = -\frac{2}{2} \underbrace{log 10}_{1} = -1$

n) b) $log_6 \frac{5}{30} = log_6 \frac{1}{6} = log_6 6^{-1} = -1 \underbrace{log_6 6}_{1} = -1$

ñ) c) $log_3 243 = log_3 3^5 = 5 \cdot \underbrace{log_3 3}_{1} = 5$

<u>EJERCICIO 33</u> : Resuelve estas ecuaciones:

a) $5^{2x^2+1} = 125$ **b)** $\log_3 (5x - 3) = 3$ **c)** $2^{2x-6} = 0{,}25^{x-1}$ **d)** $\log_5 (2x^2 - x) = 0$

e) $\sqrt[5]{49} = 7^{x^2 + \frac{6}{25}}$ **f)** $\log_2 (x - 1) = 2$ **g)** $3^{3x-1} = 9^{x+6}$ **h)** $\log_2 (x^2-5x+8) = 2$

i) $4^{x^2-8x} = 1$ **j)** $\log (11x - 1) = -1$

Solución:

a) Expresamos como potencia de 5 el segundo miembro e igualamos los exponentes:

$5^{2x^2+1} = 125 \quad \to \quad 5^{2x^2+1} = 5^3 \quad \to \quad 2x^2 + 1 = 3 \quad \to \quad 2x^2 = 2 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x = \pm 1$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$log_3 (5x - 3) = 3 \quad \to \quad 5x - 3 = 3^3 \quad \to \quad 5x - 3 = 27 \quad \to \quad 5x = 30 \quad \to \quad x = 6$

<u>Comprobación de la solución</u> $log_3 (5 \cdot 6 - 3) = log_3 27 = log_3 3^3 = 3 \cdot log_3 3 = 3 \quad \to$ Solución válida

c) Expresamos el segundo miembro como potencia de 2. A continuación, igualamos exponentes:

$$2^{2x-6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

$$2^{2x-6}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{x-1} \rightarrow 2^{2x-6}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6}=\left(2^{-1}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6}=2^{-2x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x-6=-2x+2 \rightarrow 4x=8 \rightarrow x=2$$

d) $log_5\,(2x^2-x)=0$, aplicando la definición de logaritmo, equivale a $2x^2-x=5^0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2-x=1 \rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ \dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Comprobación de las soluciones

Si $x=1 \rightarrow log_5\,(2-1)=log_5\,1=0 \rightarrow x=1$ es solución.

Si $x=\frac{-1}{2} \rightarrow log_5\left(2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=log_5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=log_5 1=0 \rightarrow x=\frac{-1}{2}$ también es solución.

e) Expresamos el primer miembro como potencia de 7 e igualamos exponentes:

$$\sqrt[5]{49}=7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \sqrt[5]{7^2}=7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow 7^{\frac{2}{5}}=7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \frac{2}{5}=x^2+\frac{6}{25} \rightarrow x^2=\frac{2}{5}-\frac{6}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2=\frac{4}{25} \rightarrow x=\pm\frac{2}{5}$$

f) Aplicando la definición de logaritmo, se obtiene:

$$log_2\left(x-1\right)=-2 \rightarrow x-1=2^{-2} \rightarrow x-1=\frac{1}{4} \rightarrow x=\frac{1}{4}+1 \rightarrow x=\frac{5}{4}$$

Comprobación de la solución: $log_2\left(\frac{5}{4}-1\right)=log_2\frac{1}{4}=log_2 2^{-2}=-2log_2 2=-2 \rightarrow$ válida

La solución es: $x=\frac{5}{4}$

g) Expresamos como potencia de 3 el segundo miembro e igualamos exponentes:

$$3^{3x-1}=9^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=\left(3^2\right)^{x+5} \rightarrow 3^{3x-1}=3^{2x+10} \rightarrow 3x-1=2x+10 \rightarrow x=11$$

h) $log_2\,(x^2-5x+8)=2 \rightarrow x^2-5x+8=2^2$ (hemos aplicado la definición de logaritmo) $\rightarrow$

$$\rightarrow x^2-5x+8=4 \rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación de las soluciones

Si $x=4 \rightarrow log_2\,(16-20+8)=log_2\,4=log_2\,2^2=2\,log_2\,2=2 \rightarrow x=4$ es solución.

Si $x=1 \rightarrow log_2\,(1-5+8)=log_2\,4=log_2\,2^2=2\,log_2\,2=2 \rightarrow x=1$ es solución.

i) a) $4^{x^2-3x}=1$ equivale a $4^{x^2-3x}=4^0$

Igualando exponentes: $x^2-3x=0 \rightarrow x\,(x-3)=0$

Luego $x=0$ y $x=3$ son las soluciones.

j) $log\,(11x-1)=-1$ equivale a $11x-1=10^{-1}$ (hemos aplicado la definición de logaritmo)

$$11x-1=\frac{1}{10} \rightarrow 11x=\frac{1}{10}+1 \rightarrow 11x=\frac{11}{10} \rightarrow x=\frac{1}{10}$$

Comprobación de la solución

$$log\left(\frac{11}{10}-1\right)=log\,\frac{1}{10}=log\,10^{-1}=-1\,log\,10=-1$$

La solución $x=\frac{1}{10}$ es válida.