12 Integrales

1. Reglas de integración

Piensa y calcula

Completa la siguiente tabla:

f(x)	x^6		$\frac{x^5}{5}$		x^3		$\frac{x^6}{6}$		x		1		x^n	
f'(x)		$4x^3$		x^2		$5x^4$		x^3		x		$2x$		x^n

Solución:

f(x)	x^6	x^4	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^3}{3}$	x^3	x^5	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^4}{4}$	x	$\frac{x^2}{2}$	1	x^2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
f'(x)	$6x^5$	$4x^3$	x^4	x^2	$3x^2$	$5x^4$	x^5	x^3	1	x	0	$2x$	nx^{n-1}	x^n

Aplica la teoría

1. $\int (2x + 5)^3\, dx$

Solución:
$\frac{(2x + 5)^4}{8} + k$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución:
$2\sqrt{x} + k$

3. $\int e^{x/2}\, dx$

Solución:
$2e^{x/2} + k$

4. $\int 5^{x+4}\, dx$

Solución:
$\frac{5^{x+4}}{L\,5} + k$

5. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

Solución:
$\frac{1}{2} L\,|x^2 + 1| + k$

6. $\int \text{sen}\,(2x + 1)\, dx$

Solución:
$-\frac{1}{2} \cos\,(2x + 1) + k$

7. $\int \cos\,(x - 1)\, dx$

Solución:
$\text{sen}\,(x - 1) + k$

8. $\int \text{tg}\,\frac{x}{3}\, dx$

Solución:
$-3\,L\,|\cos x/3| + k$

9. $\int 5e^x\,dx$

Solución:
$5e^x + k$

10. $\int (8x^3 - 6x^2 + 5x - 3)\,dx$

Solución:
$2x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + k$

11. $\int \frac{dx}{x^5}$

Solución:
$-\frac{1}{4x^4} + k$

12. $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

Solución:
$\frac{5x\sqrt[5]{x^2}}{7} + k$

13. $\int 5e^x \operatorname{tg} e^x\,dx$

Solución:
$-5\,L\,|\cos e^x| + k$

14. $\int (5x^7 - 6x^5 - x^2 - 4)\,dx$

Solución:
$\frac{5x^8}{8} - x^6 - \frac{x^3}{3} - 4x + k$

15. $\int \operatorname{sen} 2x/3\,dx$

Solución:
$-\frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3} + k$

16. $\int \frac{3dx}{2\sqrt{7x}}$

Solución:
$\frac{3\sqrt{7x}}{7} + k$

17. $\int e^{3x}\,dx$

Solución:
$\frac{e^{3x}}{3} + k$

18. $\int \frac{dx}{x^2}$

Solución:
$-\frac{1}{x} + k$

19. $\int x^2 \operatorname{tg} x^3\,dx$

Solución:
$-\frac{1}{3}\,L\,|\cos x^3| + k$

20. $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x + 5}\,dx$

Solución:
$\frac{1}{3}\,L\,|x^3 + 6x + 5| + k$

21. $\int x(5x^2 - 1)^3\,dx$

Solución:
$\frac{(5x^2 - 1)^4}{40} + k$

22. $\int 5^{x/2}\,dx$

Solución:
$\frac{2 \cdot 5^{x/2}}{L\,5} + k$

23. $\int \cos x/3\,dx$

Solución:
$3 \operatorname{sen} x/3 + k$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

Solución:
$4\sqrt[4]{x} + k$

2. Integral indefinida y definida

Piensa y calcula

Calcula la integral $F(x) = \int 2x\,dx$ tal que su gráfica pase por el punto (0, 3)

Solución:
$F(x) = x^2 + 3$

Aplica la teoría

Calcula tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

25. $f(x) = x + 1$

Solución:
$\frac{x^2}{2} + x$ $\quad \frac{x^2}{2} + x + 5$ $\quad \frac{x^2}{2} + x - 7$

26. $f(x) = \text{sen } x/2$

Solución:
$-2 \cos x/2$ $\quad -2 \cos x/2 + 3$ $\quad -2 \cos x/2 - 4$

27. $f(x) = e^x$

Solución:
e^x $\quad e^x + 2$ $\quad e^x - 1$

28. $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

Solución:
$\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8}$ $\quad \frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + 7$ $\quad \frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} - 8$

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

29. $\int (x^4 - 6x^2 + 3)\,dx$

Solución:
$\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 3x + k$

30. $\int (\text{sen } x - \cos x)\,dx$

Solución:
$-\cos x - \text{sen } x + k$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:
$\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + k$

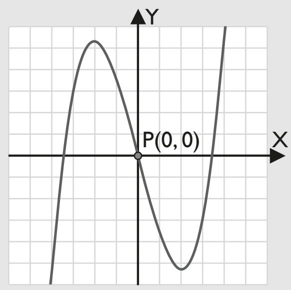
32. $\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

Solución:
$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - L\,|x| - \frac{5}{x} + k$

Calcula la primitiva de las siguientes funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso:

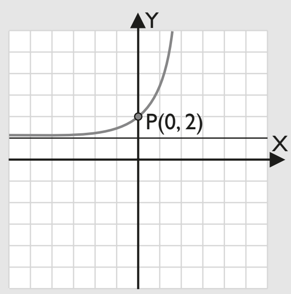
33. $f(x) = x^2 - 4$ por el punto (0, 0)

Solución:
$\frac{x^3}{3} - 4x$



34. $f(x) = e^x$ por el punto (0, 2)

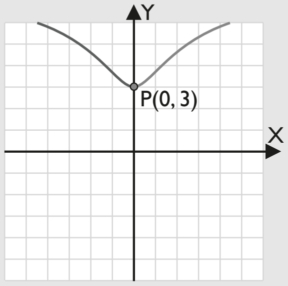
Solución:
$e^x + 1$



35. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ por el punto (0, 3)

Solución:

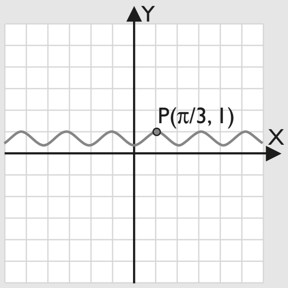
$L\,|x^2 + 1| + 3$



36. f(x) = sen 3x por el punto (π/3, 1)

Solución:

$-\dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{2}{3}$



Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow:

37. $\displaystyle\int_2^5 (x^2 - 6x + 10)\,dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x$

$F(5) - F(2) = \dfrac{50}{3} - \dfrac{32}{3} = \dfrac{18}{3} = 6\ u^2$

38. $\displaystyle\int_1^e (1/x)\,dx$

Solución:

$F(x) = L\,|x|$

$F(e) - F(1) = 1 - 0 = 1\ u^2$

39. $\displaystyle\int_0^1 2e^{2x}\,dx$

Solución:

$F(x) = e^{2x}$

$F(1) - F(0) = e^2 - 1\ u^2$

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)\,dx$

Solución:

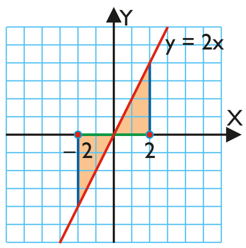
$F(x) = \operatorname{sen} x$

$F(\pi/2) - F(0) = 1 - 0 = 1\ u^2$

3. Cálculo de áreas

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente el área del recinto limitado por el eje X y la recta f(x) = 2x en el intervalo [– 2, 2]



Solución:

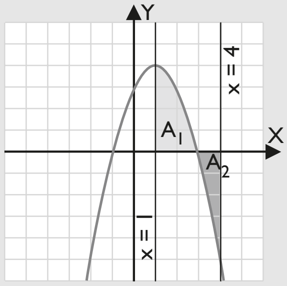
$8\ u^2$

Aplica la teoría

Calcula el área del recinto limitado por el eje X y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

41. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $[1, 4]$

Solución:



$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$

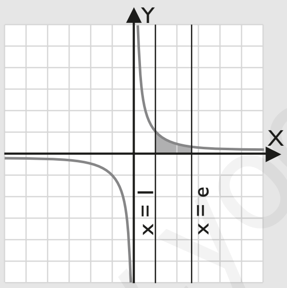
$A_1 = |F(3) - F(1)| = \left|9 - \frac{11}{3}\right| = \frac{16}{3}$

$A_2 = |F(4) - F(3)| = \left|\frac{20}{3} - 9\right| = \frac{7}{3}$

Área $= A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$ u^2

42. $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, e]$

Solución:

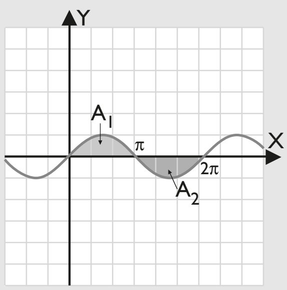


$F(x) = L|x|$

Área $= |F(e) - F(1)| = |1 - 0| = 1$ u^2

43. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:



$F(x) = -\cos x$

$A_1 = |F(\pi) - F(0)| = |1 + 1| = 2$

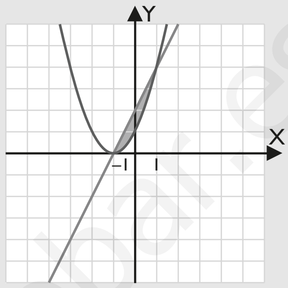
$A_2 = |F(2\pi) - F(\pi)| = |-1 - 1| = 2$

Área $= A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$ u^2

44. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x + 2$

Solución:



$f(x) - g(x) = x^2 - 1$

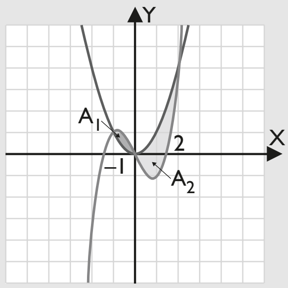
$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$

Área $= |F(1) - F(-1)| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2

45. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = x^3 - 2x \quad ; \quad g(x) = x^2$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$

$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$

$A_1 = |F(0) - F(-1)| = \left|0 - \frac{5}{12}\right| = \frac{5}{12}$

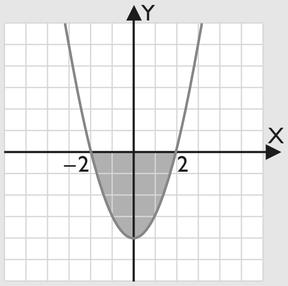
$A_2 = |F(2) - F(0)| = \left|-\frac{8}{3} - 0\right| = \frac{8}{3}$

Área $= A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$ u^2

46. Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$f(x) = x^2 - 4$

Solución:



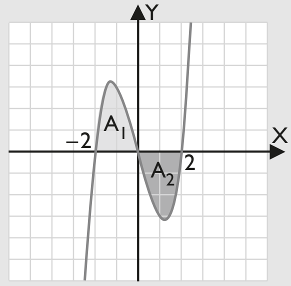
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

Área $= |F(2) - F(-2)| = \left|-\dfrac{16}{3} - \dfrac{16}{3}\right| = \dfrac{32}{3}$ u^2

47. Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

Solución:



$f(x) = 0) \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

$A_1 = |F(0) - F(-2)| = |0 + 4| = 4$

$A_2 = |F(2) - F(0)| = |-4 - 0| = 4$

Área $= A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$ u^2

4. Aplicaciones de las integrales

Piensa y calcula

Sea la función $f(x) = 2x$

a) Calcula mentalmente el área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el intervalo [0, 3]

b) Calcula la expresión $A(x) = \int_0^x 2t\,dt$ aplicando la regla de Barrow, y calcula F(3). ¿Cómo son los resultados?

Solución:

a) 9 u^2 b) $F(x) = x^2 \Rightarrow F(3) = 9$

Los resultados son iguales.

Aplica la teoría

48. Expresa la función área de la función $f(x) = x + 1$ en el intervalo [0, x] y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y f(x) en el intervalo [0, 5]

Solución:

$A(x) = \int_0^x (t + 1)\,dt = \dfrac{x^2}{2} + x \Rightarrow A(5) = \dfrac{35}{2}$ u^2

49. Expresa la función área de la función $f(x) = x^2 + 2$ en el intervalo [0, x] y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y f(x) en el intervalo [0, 1]

Solución:

$A(x) = \int_0^x (t^2 + 2)\,dt = \dfrac{x^3}{3} + 2x \Rightarrow A(1) = \dfrac{7}{3}$ u^2

50. La velocidad de un móvil en m/s se da por la función $v(t) = 6 - t/2$, donde **t** se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil en los 5 primeros segundos.

Solución:

$$e = \int_0^5 \left(6 - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{95}{4}\ \text{m}$$

51. Calcula la función que expresa la velocidad de un coche que mantiene una aceleración constante de 3 m/s^2

Solución:

$$v(t) = \int_0^t 3\ dt = 3t$$

52. Una empresa que hace cajas de cartón para embalar tiene la siguiente función de ingreso marginal, en miles de euros:

$$i(x) = 8 - \frac{x}{2}$$

donde **x** es el número de cajas vendidas en miles.

a) ¿Qué ingreso se obtiene por la venta de 4 000 cajas?

b) ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 4 000 a 5 000 cajas vendidas?

Solución:

a) $\int_0^4 \left(8 - \frac{x}{2}\right) dx = 28$ mil euros.

b) $\int_4^5 \left(8 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{23}{4}$ mil euros.

53. El coste marginal, en millones de €, de una empresa al fabricar motos se expresa por la función:

$$c(x) = 3 + x/2$$

donde **x** se mide en miles de unidades. ¿Cuál es el coste adicional al pasar de 2 000 a 4 000 unidades?

Solución:

$\int_2^4 \left(3 - \frac{x}{2}\right) dx = 3$ millones de euros.

1. Reglas de integración

54. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

Solución:
$-\frac{1}{2}\cos x^2 + k$

55. $\int \frac{1}{x}\, dx$

Solución:
$L\,|x| + k$

56. $\int (-3x + 2)^5 \, dx$

Solución:
$-\frac{(-3x + 2)^6}{18} + k$

57. $\int 5 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$

Solución:
$-10 \cos \frac{x}{2} + k$

58. $\int \frac{dx}{x^6}$

Solución:
$-\frac{1}{5x^5} + k$

59. $\int x\, e^{5x^2}\, dx$

Solución:
$\frac{e^{5x^2}}{10} + k$

60. $\int (-7x^4 + 4x^3 - x + 1)\, dx$

Solución:
$-\frac{7x^5}{5} + x^4 - \frac{x^2}{2} + x + k$

61. $\int x^4 \cos (3x^5 + 1)\, dx$

Solución:
$\frac{\operatorname{sen} (3x^5 + 1)}{15} + k$

62. $\int \frac{4\, dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
$\frac{8\sqrt{3x}}{3} + k$

63. $\int \operatorname{tg} x/5 \, dx$

Solución:
$-5\, L\, |\cos x/5| + k$

64. $\int \sqrt[7]{x^3}\, dx$

Solución:
$\frac{7x\sqrt[7]{x^3}}{10} + k$

65. $\int 5^{2x-1}\, dx$

Solución:
$\frac{5^{2x-1}}{2\, L\, 5} + k$

66. $\int \frac{2}{3} e^x\, dx$

Solución:
$\frac{2}{3} e^x + k$

67. $\int \cos \frac{5x - 3}{2}\, dx$

Solución:
$\frac{2}{5} \operatorname{sen} \frac{5x - 3}{2} + k$

68. $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x}\, dx$

Solución:
$L\, |x^2 - x| + k$

69. $\int (-3x + 1)^2\, dx$

Solución:
$-\frac{(-3x + 1)^3}{9} + k$

70. $\int x \cos x^2\, dx$

Solución:
$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + k$

71. $\int e^{x/5}\, dx$

Solución:
$5e^{x/5} + k$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

Solución:
$\frac{2\sqrt{5x-1}}{5} + k$

73. $\int 3^{2x+1}\, dx$

Solución:
$\frac{3^{2x+1}}{2 \text{ L } 3} + k$

74. $\int \sqrt[7]{(3x+5)^4}\, dx$

Solución:
$\frac{7(3x+5)\sqrt[7]{(3x+5)^4}}{33} + k$

75. $\int (5x^4 - 9x^2 - 6x + 1)\, dx$

Solución:
$x^5 - 3x^3 - 3x^2 + x + k$

76. $\int \frac{dx}{(2x-1)^5}$

Solución:
$-\frac{1}{8(2x-1)^4} + k$

77. $\int \operatorname{tg}(3x-1)\, dx$

Solución:
$-\frac{1}{3} \text{ L } |\cos(3x-1)| + k$

2. Integral indefinida y definida

Calcula tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

78. $f(x) = 6x^2 - 8x - 3$

Solución:
$F_1(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x$
$F_2(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 5$
$F_3(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 4$

79. $f(x) = 2/x$

Solución:
$F_1(x) = 2 \text{ L } |x|$
$F_2(x) = 2 \text{ L } |x| + 7$
$F_3(x) = 2 \text{ L } |x| - 8$

80. $f(x) = 2 \operatorname{tg} x/2$

Solución:
$F_1(x) = -4 \text{ L } |\cos x/2|$
$F_2(x) = -4 \text{ L } |\cos x/2| + 1$
$F_3(x) = -4 \text{ L } |\cos x/2| - 3$

81. $f(x) = 6/x^3$

Solución:
$F_1(x) = -3/x^2$ $F_2(x) = -3/x^2 + 9$ $F_3(x) = -3/x^2 - 7$

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

82. $\int (-x^3 + 3x^2 + 4x - 1)\, dx$

Solución:
$-\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x^2 - x + k$

83. $\int (\cos x/3 - \operatorname{tg} 2x)\, dx$

Solución:
$3 \operatorname{sen} x/3 + \frac{1}{2} \text{ L } |\cos 2x| + k$

84. $\int \sqrt[5]{x^4}\, dx$

Solución:
$\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} + k$

85. $\int\left((3x-1)^2+\frac{6}{2x+3}-\frac{4}{(5x-1)^2}\right)dx$

Solución:

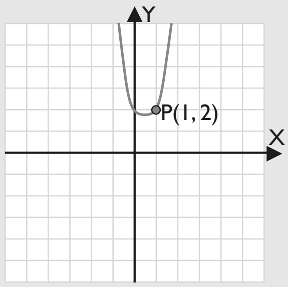
$\frac{(3x-1)^3}{9}+3\,L\,|2x+3|+\frac{4}{5(5x-1)}+k$

Calcula la primitiva de las siguientes funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso:

86. $f(x) = (2x-1)^3$ por el punto (1, 2)

Solución:

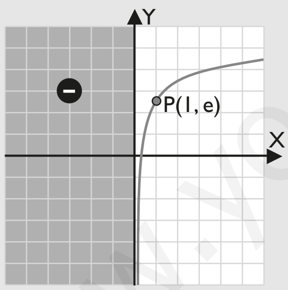
$\frac{(2x-1)^4}{8}+\frac{15}{8}$



87. $f(x) = 1/x$ por el punto (1, e)

Solución:

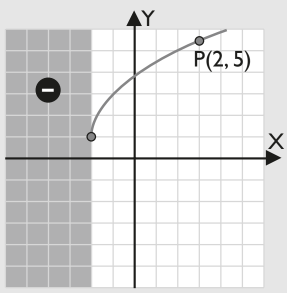
$L\,|x| + e$



88. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ por el punto (2, 5)

Solución:

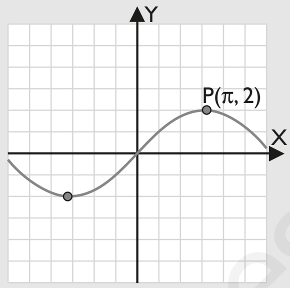
$F(x) = 1 + 2\sqrt{x+2}$



89. $f(x) = \cos x/2$ por el punto $(\pi, 2)$

Solución:

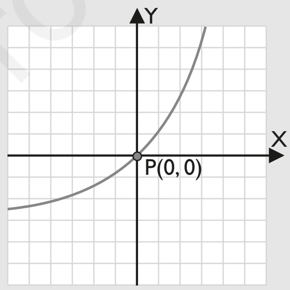
$F(x) = 2\,\text{sen}\,x/2$



90. $f(x) = e^{x/3}$ por el punto (0, 0)

Solución:

$F(x) = 3e^{x/3} - 3$



Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

91. $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$

Solución:

$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$F(1) - F(-1) = -\frac{4}{3}$

92. $\int_{0}^{3}\sqrt{x}\,dx$

Solución:

$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$F(3) - F(0) = 2\sqrt{3}$

93. $\int_{1}^{3}2^x\,dx$

Solución:

$F(x) = \dfrac{2^x}{L\,2}$

$F(3) - F(1) = \dfrac{6}{L\,2}$

94. $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx$

Solución:

$F(x) = -\cos x$

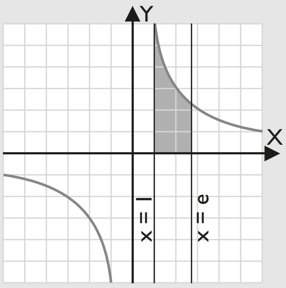
$F(\pi) - F(0) = 2$

3. Cálculo de áreas

Calcula el área del recinto limitado por el eje X y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

95. $f(x) = 6/x$ en el intervalo $[1, e]$

Solución:

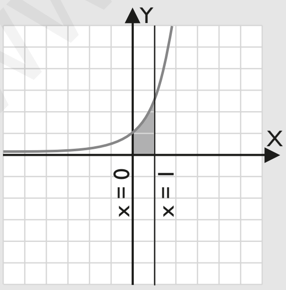


$F(x) = 6\,L\,|x|$

Área $= |F(e) - F(1)| = |6 - 0| = 6\ u^2$

96. $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:

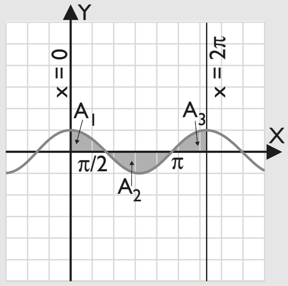


$F(x) = e^x$

Área $= |F(1) - F(0)| = e - 1\ u^2$

97. $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:



$F(x) = \text{sen } x$

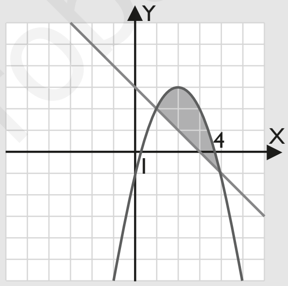
$A_1 = 1,\ A_2 = 2,\ A_3 = 1$

Área $= 4\ u^2$

98. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad ; \quad g(x) = -x + 3$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$

$f(x) - g(x) = -x^2 + 5x - 4$

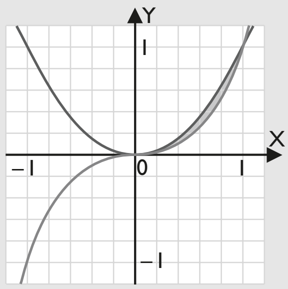
$F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 - 4x$

Área $= |F(4) - F(1)| = \left|\dfrac{8}{3} + \dfrac{11}{6}\right| = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}\ u^2$

99. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$f(x) = x^3 \quad ; \quad g(x) = x^2$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

$g(x) - f(x) = x^2 - x^3$

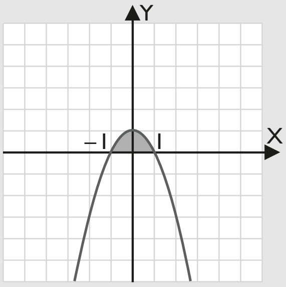
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$

Área $= |F(1) - F(0)| = \left|\dfrac{1}{12} - 0\right| = \dfrac{1}{12}\ u^2$

100. Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

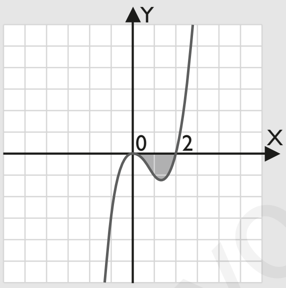
$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x$

Área $= |F(1) - F(-1)| = \left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}\ u^2$

101. Calcula el área comprendida entre el eje X y la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

Área $= |F(2) - F(0)| = \left|-\frac{4}{3} - 0\right| = \frac{4}{3}\ u^2$

4. Aplicaciones de las integrales

102. Expresa la función área de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y f(x) en el intervalo [0, 3]

Solución:

$A(x) = \int_0^x (t^2 + 2t)\, dt = \frac{x^3}{3} + x^2 \Rightarrow A(3) = 18\ u^2$

103. Expresa la función área de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, x]$ y calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y f(x) en el intervalo [0, 1]

Solución:

$A(x) = \int_0^x e^t\, dt = e^x \Rightarrow A(1) = e\ u^2$

104. La velocidad de un móvil en m/s se da por la función $v(t) = 2 + t$, donde **t** se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil en los 6 primeros segundos.

Solución:

$e = \int_0^6 (2 + t)\, dt = 30\ m$

105. Calcula las funciones que expresan la velocidad y el espacio recorrido por una pelota que cae libremente al vacío.

Solución:

Suponemos $g = 10\ m/s^2$

$v(t) = \int_0^t 10\, dt = 10t$

$e(t) = \int_0^t 10t\, dt = 5t^2$

106. La función de ingreso marginal de un producto, en millones de euros, es:

$$i(x) = 15 - 2x$$

donde **x** es el número de unidades vendidas en miles.

a) ¿Qué ingreso se obtiene por la venta de 2 000 unidades?

b) ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 2 000 a 3 000 unidades vendidas?

Solución:

a) $\int_0^2 (15 - 2x)\, dx = 26$ millones de euros.

b) $\int_2^3 (15 - 2x)\, dx = 10$ millones de euros.

Para ampliar

107. $\displaystyle\int\left(x^5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{x^6}{6} + L\,|x| + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + k$

108. $\displaystyle\int\left((x + 3)^4 - \frac{2}{2x + 3} + \frac{3}{(3x - 1)^2}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{(x + 3)^5}{5} - L\,|2x + 3| - \dfrac{1}{3x - 1} + k$

109. $\displaystyle\int\left(e^{x/2} - 7^{2x - 3} + \frac{x}{x^2 - 9}\right) dx$

Solución:

$2e^{x/2} - \dfrac{7^{2x - 3}}{2\,L\,7} + \dfrac{1}{2}\,L\,|x^2 - 9| + k$

110. $\displaystyle\int\left(\text{sen}\,(2x + 1) - \cos\frac{x}{2} + x\,\text{tg}\,x^2\right) dx$

Solución:

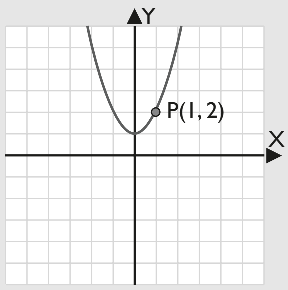
$-\dfrac{1}{2}\cos\,(2x + 1) - 2\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\,L\,|\cos x^2| + k$

Calcula la primitiva de las siguientes funciones para que pasen por el punto que se indica en cada caso y haz el dibujo de la función integral para comprobarlo.

111. $f(x) = 2x$ por el punto $(1, 2)$

Solución:

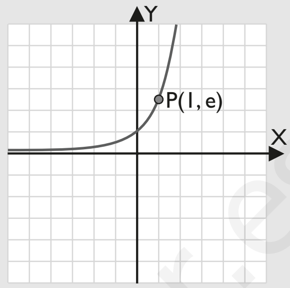
$F(x) = x^2 + 1$



112. $f(x) = e^x$ por el punto $(1, e)$

Solución:

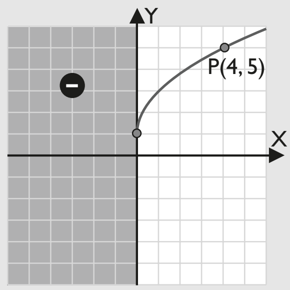
$F(x) = e^x$



113. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ por el punto $(4, 5)$

Solución:

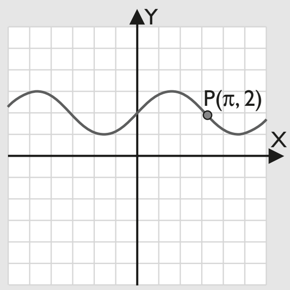
$F(x) = 2\sqrt{x} + 1$



114. $f(x) = \cos x$ por el punto $(\pi, 2)$

Solución:

$F(x) = 2 + \text{sen}\,x$



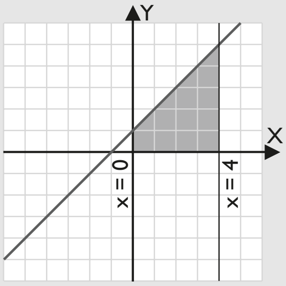
Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow, dibuja cada una de las funciones del integrando y haz la interpretación geométrica de la regla de Barrow.

115. $\displaystyle\int_0^4 (x + 1)\,dx$

Solución:

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$F(4) - F(0) = 12 - 0 = 12\ u^2$



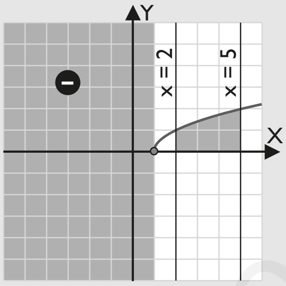
El resultado obtenido, $12\ u^2$, es el área de la zona coloreada.

116. $\int_2^5 \sqrt{x-1}\ dx$

Solución:

$F(x) = \frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$

$F(5) - F(2) = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}\ u^2$



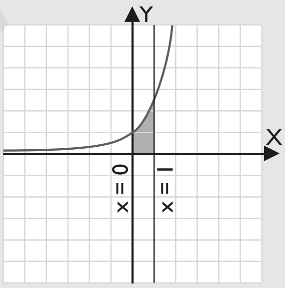
El resultado obtenido, $\frac{14}{3}\ u^2$, es el área de la zona coloreada.

117. $\int_0^1 e^x\ dx$

Solución:

$F(x) = e^x$

$F(1) - F(0) = e - 1\ u^2$



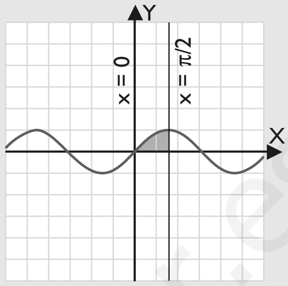
El resultado obtenido, $e - 1\ u^2$, es el área de la zona coloreada.

118. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}\ x\ dx$

Solución:

$F(x) = -\cos x$

$F(\pi/2) - F(0) = 0 + 1 = 1\ u^2$

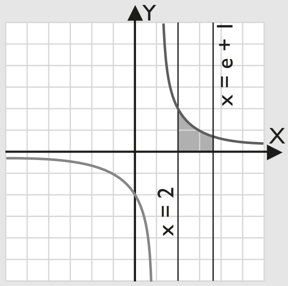


El resultado obtenido, $1\ u^2$, es el área de la zona coloreada.

Calcula el área del recinto limitado por el eje X y cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

119. $f(x) = 2/(x-1)$ en el intervalo $[2, e+1]$

Solución:

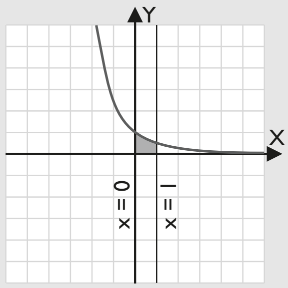


$F(x) = 2\ L\ |x - 1|$

Área $= |F(e+1) - F(2)| = |2 - 0| = 2\ u^2$

120. $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:



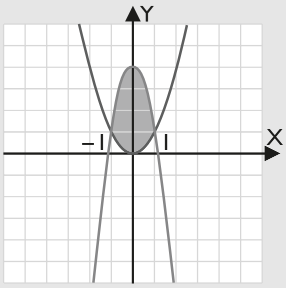
$F(x) = -e^{-x}$

Área $= |F(1) - F(0)| = \left| -\frac{1}{e} + 1 \right| = 1 - 1/e\ u^2$

121. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = -3x^2 + 4 \quad ; \quad g(x) = x^2$$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

$f(x) - g(x) = -4x^2 + 4$

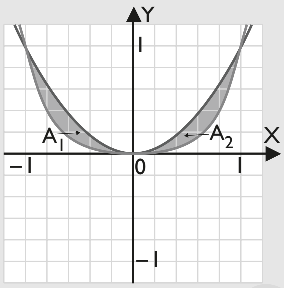
$F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x$

$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = \left|\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right| = \frac{16}{3}\ u^2$

122. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^4 \quad ; \quad g(x) = x^2$$

Solución:



$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$f(x) - g(x) = x^4 - x^2$

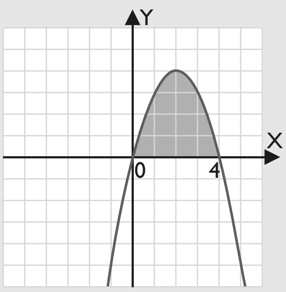
$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$

$A_1 = A_2 = 2/15$

$\text{Área} = 4/15\ u^2$

123. Calcula el área comprendida por el eje X y la función $f(x) = -x^2 + 4x$

Solución:



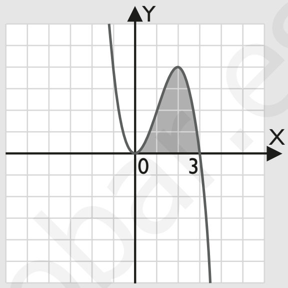
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

$\text{Área} = |F(4) - F(0)| = \left|\frac{32}{3} - 0\right| = \frac{32}{3}\ u^2$

124. Calcula el área comprendida por el eje X y la función $f(x) = 3x^2 - x^3$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

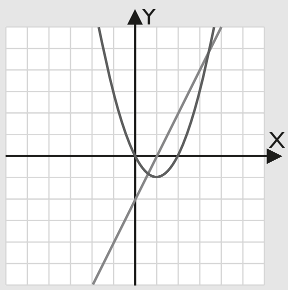
$F(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$

$\text{Área} = |F(3) - F(0)| = \left|\frac{27}{4} - 0\right| = \frac{27}{4}\ u^2$

125. Expresa la función área A(x) en el intervalo [0, x] limitada por el eje X y la función $f(x) = 2x - 2$. Dibuja la gráfica f(x) y A(x) e interpreta el resultado.

Solución:

$A(x) = \int_0^x (2t - 2)\, dt = x^2 - 2x$



La función A(x) halla el área comprendida entre el eje X y la recta $y = 2x - 2$ en el intervalo [0, x]

126. Expresa la función área A(x) en el intervalo [1, x] limitada por el eje X y la función $f(x) = 1 / x$

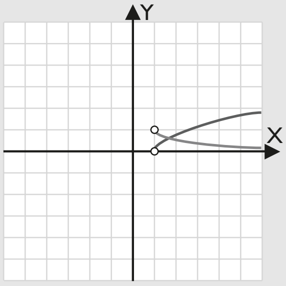
a) Dibuja la gráfica f(x) y A(x) e interpreta el resultado.

b) Calcula el valor del área del recinto limitado por el eje X y la función f(x) en el intervalo [1, e]

Solución:

$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = L\,|x|$

a)



La función A(x) halla el área comprendida entre el eje X y la hipérbola y = 1/x en el intervalo [1, x]

b) $A(e) = L\, e = 1\ u^2$

127. La velocidad de un móvil en m/s viene dada por la función v(t) = 5 + 2t, donde **t** se mide en segundos. Calcula el espacio recorrido por el móvil entre los 3 y 5 segundos.

Solución:

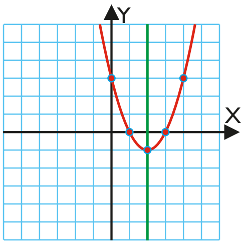
$e(t) = \int (5 + 2t)\, dt = 5t + t^2$

$e(5) - e(3) = 50 - 24 = 26$ m

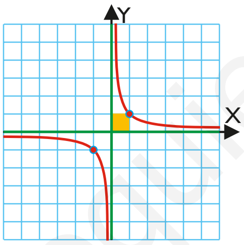
Problemas

128. Dadas las curvas de los siguientes gráficos, halla la fórmula de cada una de ellas y luego calcula la integral indefinida.

a)



b)



Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

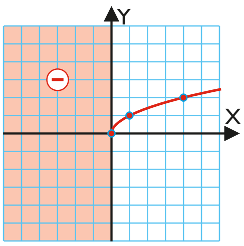
$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + k$

b) $y = 1/x$

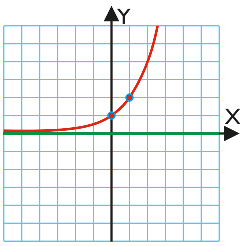
$F(x) = L\,|x| + k$

129. Dadas las curvas de los siguientes gráficos, halla la fórmula de cada una de ellas y luego calcula la integral indefinida.

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x}$

$F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + k$

b) $y = 2^x$

$F(x) = \frac{2^x}{L\,2} + k$

130. Dada la recta y = –2x + 4

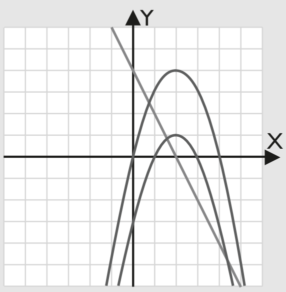
a) haz el dibujo de la recta.

b) calcula dos primitivas.

c) representa en el mismo dibujo de la recta las dos primitivas.

d) ¿en qué se parecen las dos primitivas?

Solución:

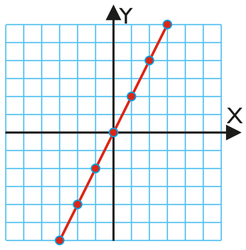


$F_1(x) = -x^2 + 4x$

$F_2(x) = -x^2 + 4x - 3$

Una primitiva se obtiene de la otra por una traslación.

131. Dada la recta del siguiente gráfico:



a) halla la ecuación de la recta.

b) calcula dos primitivas.

c) representa en el mismo dibujo de la recta las dos primitivas.

d) ¿en qué se parecen las dos primitivas?

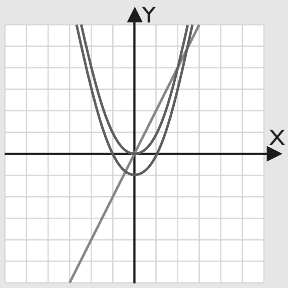
Solución:

a) $y = 2x$

b) $F_1(x) = x^2$

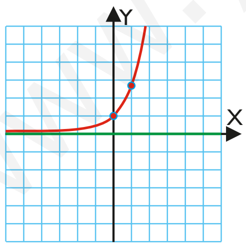
$F_2(x) = x^2 - 1$

c)



d) Una primitiva se obtiene de la otra por traslación.

132. Dada la curva del siguiente gráfico:



a) halla la fórmula de la función.

b) calcula una primitiva y represéntala.

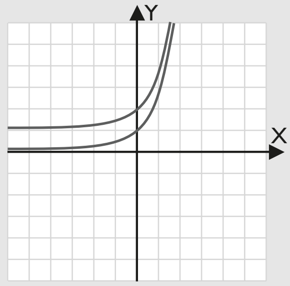
c) ¿en qué se parecen la primitiva y la función?

Solución:

a) $y = e^x$

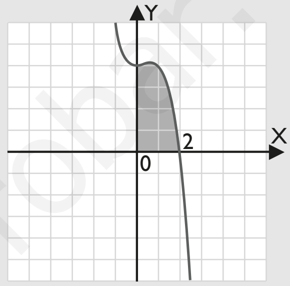
b) $F(x) = e^x + 1$

c) Una primitiva se obtiene de la otra por una traslación.



133. Calcula el área comprendida entre los ejes de coordenadas y la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$

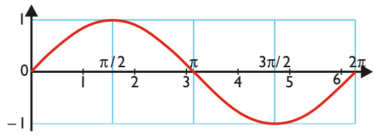
Solución:



$$F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 4x$$

$$\text{Área} = |F(2) - F(0)| = \left|\frac{20}{3} - 0\right| = \frac{20}{3}\ u^2$$

134. Dada la curva del siguiente gráfico, halla la fórmula y luego calcula la integral indefinida.



Solución:

$y = \text{sen } x$

$$\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + k$$

135. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 5 \quad ; \quad g(x) = -4$$

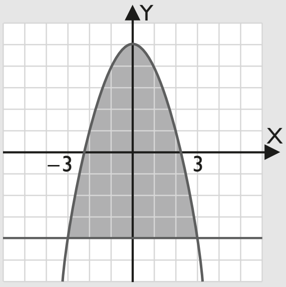
Solución:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$

$f(x) - g(x) = -x^2 + 9$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 9x$$

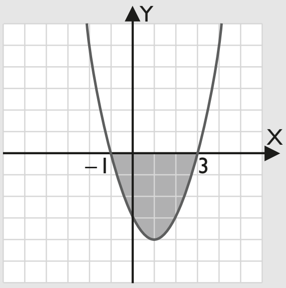
$$\text{Área} = |F(3) - F(-3)| = |18 + 18| = 36\ u^2$$



136. Calcula el área comprendida por el eje X y la función

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$

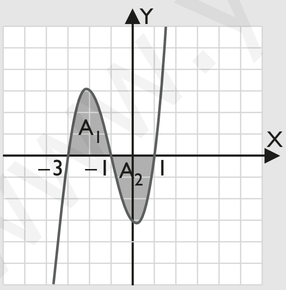
$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

Área $= |F(3) - F(-1)| = \left|-9 - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{32}{3}$ u^2

137. Calcula el área comprendida por el eje X y la función

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 3x$

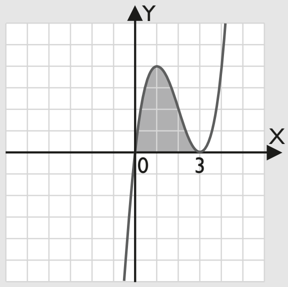
$A_1 = A_2 = 4$

Área = 8 u^2

138. Calcula el área comprendida por el eje X y la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Solución:



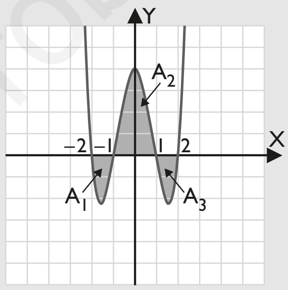
$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{9x^2}{2}$

Área $= |F(3) - F(0)| = \left|\dfrac{27}{4} - 0\right| = \dfrac{27}{4}$ u^2

139. Calcula el área comprendida por el eje X y la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Solución:



$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$

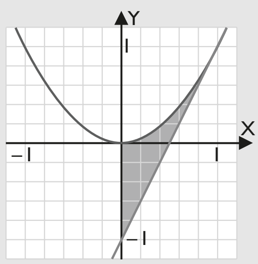
$F(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5x^3}{3} + 4x$

$A_1 = A_3 = 22/15, A_2 = 76/15$

Área = 8 u^2

140. Dada la función $f(x) = x^2$ y una tangente a dicha curva $y = 2x - 1$, halla el punto de tangencia y el área comprendida por el eje de ordenadas, la curva y la tangente.

Solución:



$x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$

Punto de tangencia: P(1, 1)

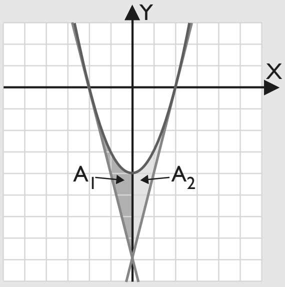
$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1$

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$

Área = 1/3 u^2

141. Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 4$ y las tangentes a dicha curva en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Solución:



$y = x^2 - 4$ corta al eje de abcisas en los puntos A(– 2, 0) y B(2, 0)

$y' = 2x$

Recta tangente en el punto A(– 2, 0)

$y'(-2) = -4$

$y = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8$

$f(x) - g(x) = x^2 + 4x + 4$

$A_1 = 8/3\ u^2$

Recta tangente en el punto B(2, 0)

$y'(2) = 4$

$y = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$

$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$

$A_2 = 8/3\ u^2$

Área = $16/3\ u^2$

142. El ritmo de crecimiento de una población de aves viene dado por la función $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, donde **x** se mide en años, y f(x), en miles. ¿En cuánto aumentarán las aves durante el segundo y el tercer año?

Solución:

$\int_1^3 (-x^2 + 2x + 8)\, dx = \frac{46}{3}$ miles de aves.

143. Una tubería se rompe y se pierde agua a una velocidad determinada por la función $f(t) = 1 + 2t$, donde **t** se mide en minutos, y f(t), en litros por minuto.

a) ¿Cuál es la función que da la cantidad de agua perdida al cabo de **x** minutos?

b) ¿Cuánta agua se pierde durante la cuarta hora?

Solución:

a) $F(x) = \int_0^x (1 + 2t)\, dt = x + x^2$

b) $F(4) - F(3) = 20 - 12 = 8$ litros.

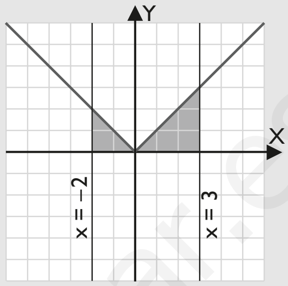
Para profundizar

144. Representa la función:

$$y = |x|$$

y sin utilizar el cálculo integral halla el área comprendida entre el eje X y la función en el intervalo [– 2, 3]

Solución:

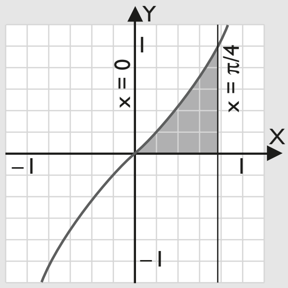


Área = $6{,}5\ u^2$

145. Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la siguiente función en el intervalo que se indica:

$$f(x) = \text{tg } x \text{ en el intervalo } [0, \pi/4]$$

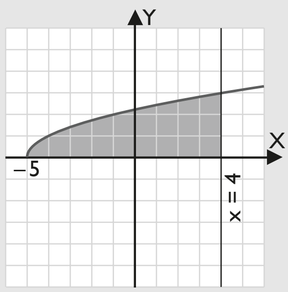
Solución:



$\int_0^{\pi/4} \text{tg } x\, dx = \frac{L\,2}{2} = 0{,}35\ u^2$

146. Calcula el área comprendida entre el eje X, la recta x = 4 y la función $f(x) = \sqrt{x + 5}$

Solución:

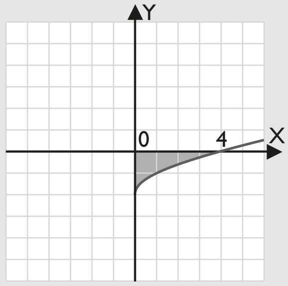


Área = $\int_{-5}^{4} \sqrt{x + 5}\, dx = 18\ u^2$

147. Calcula el área comprendida entre los ejes y la función:

$$f(x) = -2 + \sqrt{x}$$

Solución:



$$\text{Área} = \left| \int_0^4 \left(-2 + \sqrt{x}\right) dx \right| = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

148. Dadas las funciones: $f(x) = kx^2$; $g(x) = x$, halla el valor de **k** para que el área comprendida entre las dos curvas sea $8/3 \text{ u}^2$

Solución:

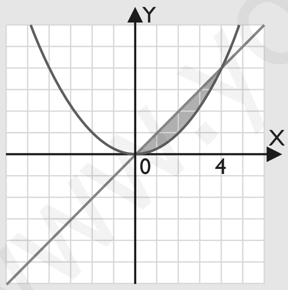
Resolviendo la ecuación $kx^2 = x$ se obtiene, $x = 0$ y $x = 1/k$

$$\int_0^{1/k} (x - kx^2)\, dx = \frac{1}{6k^2}$$

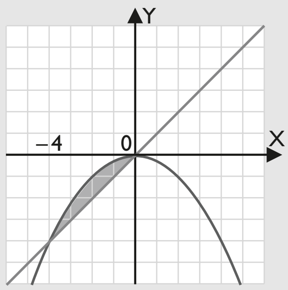
Resolviendo la ecuación:

$$\frac{1}{6k^2} = \frac{8}{3} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{4}$$

a) $k = \dfrac{1}{4}$



b) $k = -\dfrac{1}{4}$



149. El número de nacimientos, en miles, en una población viene dado por la función:

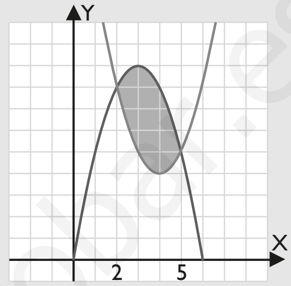
$$f(x) = -x^2 + 6x$$

donde **x** se mide en años.

El número de muertes, en miles, en la población viene dado por la función $g(x) = x^2 - 8x + 20$, donde **x** se mide en años.

Calcula la variación de población entre el segundo y quinto año.

Solución:



Variación de la población:

$$f(x) - g(x) = -2x^2 + 14x - 20$$

$$\int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)\, dx = 9 \text{ mil personas.}$$

150. El coste marginal, en millones de euros, de una empresa al fabricar juguetes se expresa por la función

$$c(x) = 2 + x/3$$

donde **x** se mide en miles de unidades.

¿Cuál es el coste adicional al pasar de 2 000 a 3 000 unidades?

Solución:

Variación de la población:

$$\int_2^5 \left(2 + \frac{x}{3}\right) dx = \frac{19}{2} \text{ millones de euros.}$$

151. El beneficio marginal, en millones de euros, que se obtiene de un determinado producto viene dado por la función:

$$b(x) = -x^2 + 4x + 5$$

donde **x** son, en miles, las unidades producidas y vendidas.

Calcula el beneficio conseguido al aumentar la producción de 2 000 a 4 000 unidades.

Solución:

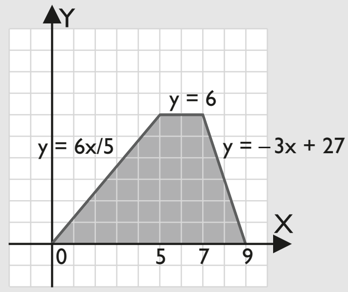
$$\int_2^4 \left(-x^2 + 4x - 5\right) dx = \frac{46}{3} \text{ millones de euros.}$$

152. Un móvil parte del reposo y tarda 5 segundos en alcanzar una velocidad de 6 m/s. Mantiene esa velocidad durante 2 segundos y comienza a frenar hasta pararse en 2 segundos. Calcula el espacio que ha recorrido.

Solución:

$$\text{Área} = \int_0^5 \frac{6x}{5}\,dx + \int_5^7 6\,dx + \int_7^9 (-3x + 27)\,dx =$$

$$= 15 + 12 + 6 = 33 \text{ m}$$



Paso a paso

153. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (e^{2x} - \text{sen } 3x)\, dx$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

154. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (2x - 4)\, dx$$

tal que su gráfica pase por el punto P(4, 3)
Representa la integral obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:

155. Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo [0, 3]

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

156. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

157. $\displaystyle\int \left(\frac{6}{3x+5} + \frac{8}{(2x-3)^2} \right) dx$

Solución:
$$2 \text{ L } |3x+5| - \frac{4}{2x-3}$$

158. $\displaystyle\int \left(\sqrt{5x} + e^{x/3} \right) dx$

Solución:
$$\frac{2x\sqrt{5x}}{3} + 3e^{x/3}$$

159. $\displaystyle\int \left(\text{sen } (3x+5) - \cos \frac{x}{4} \right) dx$

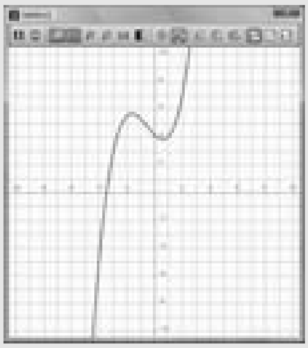
Solución:
$$-4 \text{ sen } \frac{x}{4} - \frac{\cos (3x+5)}{3}$$

160. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (x^2 + x - 1)$$

tal que su gráfica pase por el punto P(1, 4)
Dibuja la integral obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:
$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{25}{6}$$

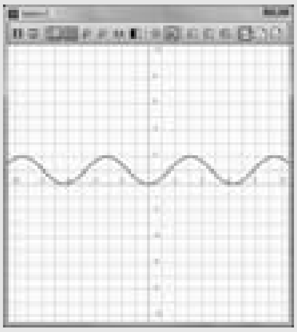


161. Calcula la integral: $F(x) = \int \text{sen } x\, dx$

tal que su gráfica pase por el punto P(π, 2)
Dibuja la integral obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

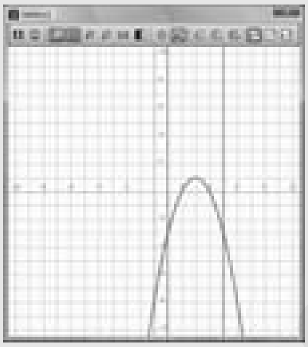
F(x) = 1 – cos x



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

162. Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función: $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ en el intervalo [1, 5]

Solución:

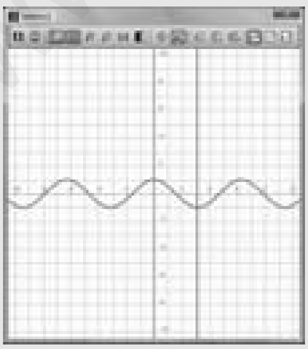


$A_1 = 4/3$, $A_2 = 4/3$, $A_3 = 4/3$

Área = 4 u^2

163. Calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función: f(x) = cos x en el intervalo [0, π]

Solución:



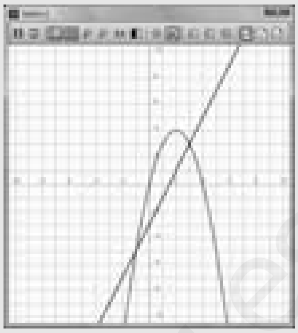
$A_1 = 1$, $A_2 = 1$

Área = 2 u^2

164. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 4x \quad ; \quad g(x) = 2x - 3$$

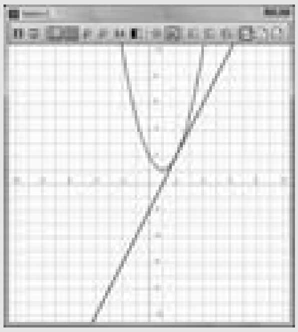
Solución:



$f(x) - g(x) = -x^2 + 2x + 3$ Área = $\frac{32}{3}$ u^2

165. Calcula el área comprendida entre el eje Y y las funciones: $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = 2x - 2$

Solución:

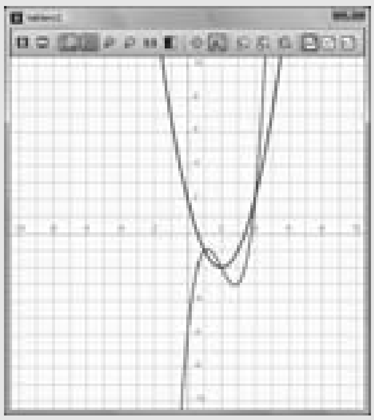


$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$ Área = $\frac{8}{3}$ u^2

166. Calcula el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 6; \quad g(x) = x^2 - 4x + 2$$

Solución:

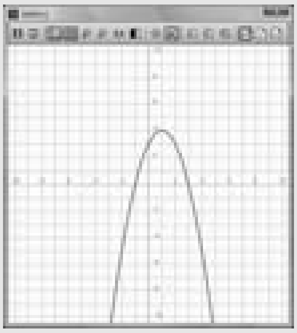


$f(x) - g(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$A_1 = \dfrac{5}{12}$ $A_2 = \dfrac{8}{3}$ $\text{Área} = \dfrac{37}{12}\ u^2$

167. Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

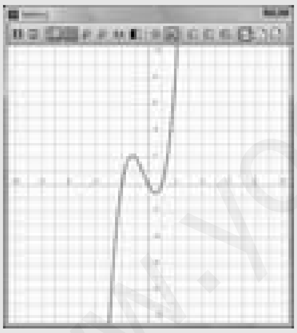
Solución:



$\text{Área} = \dfrac{32}{3}\ u^2$

168. Calcula el área comprendida por el eje X y la siguiente función: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

Solución:



$A_1 = \dfrac{8}{3}$ $A_2 = \dfrac{5}{12}$ $\text{Área} = \dfrac{37}{12}\ u^2$

169. Un coche lleva una velocidad en m/s en función del tiempo según la función:

$$v(t) = 8 - 2t$$

donde **t** se mide en segundos. Calcula el espacio que recorre el coche entre el primer y el tercer segundo tras iniciarse el movimiento.

Solución:

$$\int_1^3 (8 - 2t)\, dt = 8 \text{ m}$$

170. Una empresa que hace programas de *software* tiene una función de ingreso marginal:

$$i(x) = 1\,000 - \frac{x}{10}$$

donde **x** es el número de programas vendidos. ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 5 000 a 6 000 programas vendidos?

Solución:

$$\int_{5\,000}^{6\,000} \left(1\,000 - \frac{x}{10}\right) dx = 450\,000 \text{ €}$$