COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$f(x) = x^3 - 1$ $\quad$ $g(x) = 1 - 2x$ $\quad$ $h(x) = 3^{x+1}$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 1 \rightarrow y = x^3 - 1 \rightarrow x^3 = y + 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt[3]{x+1}\right) = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

b) $g(x) = 1 - 2x \rightarrow y = 1 - 2x \rightarrow x = \dfrac{1-y}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2}$

$$g \circ g^{-1}(x) = g\left(g^{-1}(x)\right) = g\left(\frac{1-x}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{1-x}{2}\right) = 1 - (1-x) = x$$

c) $h(x) = 3^{x+1} \rightarrow y = 3^{x+1} \rightarrow x + 2 = \log_2 y \rightarrow x = \log_2 y - 2 \rightarrow h^{-1}(x) = \log_2 x - 2$

$$h \circ h^{-1}(x) = h\left(h^{-1}(x)\right) = h\left(\log_2 x - 2\right) = 2^{\log_2 x - 2 + 2} = 2^{\log_2 x} = x$$

2. Siendo $f(x) = 5 - x$, $g(x) = 3x - a$, calcular el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

Solución:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x - a) = 5 - (3x - a) = 5 - 3x + a$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5 - x) = 3(5 - x) - a = 15 - 3x - a$

Como $f \circ g = g \circ f$, debe verificarse: $5 - 3x + a = 15 - 3x - a$

$5 - 3x + a = 15 - 3x - a \rightarrow 5 + a = 15 - a \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$

3. Dadas las siguientes funciones halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, nos dan la dada:

a) $f \circ g(x) = (x + 2)^3$ $\quad$ b) $f \circ g(x) = 2^{2x+1}$ $\quad$ c) $f \circ g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

Solución:

a) Las funciones pueden ser $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + 2$

$f \circ g(x) = f(x + 2) = (x + 2)^3$

b) Las funciones pueden ser $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2x + 1$

$f \circ g(x) = f(2x + 1) = 2^{2x+1}$

c) Las funciones pueden ser $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ y $g(x) = x^2$

$f \circ g(x) = f(x^2) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$

4. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$, $g(x) = 2x - 1$. Calcula $(f \circ g)^{-1}(3)$.

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \dfrac{2x-1+2}{3} = \dfrac{2x+1}{3}$

Sea $h(x) = \dfrac{2x+1}{3}$, vamos a calcular su inversa:

$y = \dfrac{2x+1}{3} \rightarrow 3y = 2x+1 \rightarrow 2x = 3y-1 \rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{2}$

$h^{-1}(3) = \dfrac{8}{2} = 4$