EJERCICIOS RESUELTOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

a) $(z_1 - z_2)\,z_3$	**b)** $z_1 z_4 + z_3 z_4$	**c)** $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$	**d)** $z_1 + z_3^{-1}$	**e)** z_2^{-1}
f) $\overline{\overline{z_1 z_2}}$	**g)** $\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1}$	**h)** $z_1^2 z_3$	**i)** $\frac{z_2}{z_1}$	**j)** $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2)\,z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3:

$$(z_1 - z_2)\,z_3 = \big(-3+4i - (5-2i)\big)\frac{3}{2} = \big(-3-5+(4+2)i\big)\frac{3}{2} = (-8+6i)\frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan $z_1 z_4$ y $z_3 z_4$ para después sumar los resultados:

$$z_1 z_4 = (-3+4i)\,7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3 z_4 = \frac{3}{2}\,7i = \frac{21}{2}i$$

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = -28-21i + \frac{21}{2}i = -28 - \frac{21}{2}i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 + z_3)\,z_4 = \left(-3 + 4i + \frac{3}{2}\right)7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right)7i = \frac{-21}{2}i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2}i$$

c) En primer lugar se calcula la operación $z_1 + z_4 - 5z_2 = -3+4i + 7i - 5(5-2i) = -28+21i$ y después se calcula su conjugado, $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2} = -28-21i$

d) El inverso de z_3 es $z_3^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ y, por tanto, $z_1 + z_3^{-1} = -3+4i + \frac{2}{3} = \frac{-7}{3}+4i$

e) Para calcular el inverso de $z_2 = 5-2i$ se puede proceder de dos formas:

- mediante la definición: $z_2^{-1} = \frac{5}{5^2+(-2)^2} - \frac{-2}{5^2+(-2)^2}i = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$

- escribiéndolo como un cociente y efectuando la división multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5-2i} = \frac{1(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i}{25-4i^2} = \frac{5+2i}{29} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$$

f) Teniendo en cuenta que el conjugado del conjugado de un número es el propio número, es decir, $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2$, se tiene $\overline{\overline{z_1 z_2}} = z_1 z_2 = (-3+4i)(5-2i) = -15+6i+20i-8i^2 = -7+26i$

g) En primer lugar, se realiza la suma de z_1 y z_2, después se calcula el conjugado de este resultado y finalmente el inverso de éste último:

$$z_1 + z_2 = -3+4i + 5-2i = -3+5+(4-2)i = 2+2i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 2-2i$$

$$\left(\overline{z_1 + z_2}\right)^{-1} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{2+2i}{4-4i^2} = \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Observar que se podría haber invertido el orden de realización de las dos últimas operaciones ya que se verifica $\left(\overline{a+bi}\right)^{-1} = \overline{(a+bi)^{-1}}$

h) $z_1^2 z_3 = (-3+4i)^2 \frac{3}{2} = (9-24i+16i^2)\frac{3}{2} = (9-24i-16)\frac{3}{2} = (-7-24i)\frac{3}{2} = \frac{-21}{2} - 36i$

i) Se efectúa el cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{-3+4i} = \frac{(5-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-15-20i+6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-15-14i-8}{9+16} = \frac{-23-14i}{25} = \frac{-23}{25} - \frac{14}{25}i$$

j) En primer lugar se calcula el denominador

$$2z_3 + z_4 = 2\frac{3}{2} + 7i = 3+7i$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cociente queda:

$$\frac{z_1}{2z_3 + z_4} = \frac{-3+4i}{3+7i} = \frac{(-3+4i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{-9+21i+12i-28i^2}{9-49i^2} = \frac{-9+33i+28}{9+49} = \frac{19+33i}{58} = \frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2-i$ y $z_2 = 3+6i$, determinar el número x que verifica cada una de las siguientes igualdades:

a) $z_1 + x = z_2$ **b)** $z_1^2\, x = 1$ **c)** $z_1 + z_2 + x = 1$ **d)** $z_2^2 + x = -z_1^2$ **e)** $z_2\, x = z_1$

Solución

a) Despejando x se tiene $x = z_2 - z_1 = 3+6i - (2-i) = 3-2+(6+1)i = 1+7i$

b) Despejando x se tiene $x = \frac{1}{z_1^2}$ que existe al ser z_1^2 no nulo.

Aplicando la fórmula del cuadrado de una diferencia, se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3-4i$$

y calculando el inverso del resultado anterior queda

$$x = \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{9-16i^2} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

c) Despejando x se tiene $x = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (2-i) - (3+6i) = 1 - 2 - 3 + (1-6)i = -4-5i$

d) Despejando x se tiene $x = -z_1^2 - z_2^2$. Calculando el cuadrado de z_1 y z_2 se tiene:

$$z_1^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3-4i$$

$z_2{}^2 = (3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i – 36 = -27+36i$

Así, $x = -z_1{}^2 - z_2{}^2 = -(3-4i) - (-27+36i) = -3 + 4i + 27 - 36i = 24-32i$

e) Al ser z_2 no nulo, se puede despejar x obteniéndose $x = \frac{z_1}{z_2}$. Para calcular este cociente se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{3+6i} = \frac{(2-i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)} = \frac{6-12i-3i+6i^2}{9-36i^2} = \frac{6-15i-6}{9+36} = \frac{-15i}{45} = \frac{-1}{3}i$$

3. Determinar una ecuación de coeficientes reales cuyas soluciones en $\mathbb{C}$ sean -3, $2+i$ y $2-i$.

Solución

Si -3, $2+i$ y $2-i$ son las soluciones de una ecuación, esta ha de ser proporcional a

$$(x-(-3))\ (x-(2+i))\ (x-(2-i)) = 0$$

realizando el producto del primer miembro de la ecuación se tiene

$$(x-(-3))\ (x-(2+i))\ (x-(2-i)) = (x+3)\ (x-2-i)\ (x-2+i) = (x+3)\ ((x-2)^2-i^2) = (x+3)\ (x^2-4x+4+1) =$$

$$= (x+3)\ (x^2-4x+5) = x^3 - x^2 - 7x + 15$$

Por tanto, una de las ecuaciones que cumplen la condición indicada es $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

4. Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5+2i$.

Solución

Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada, las cuatro raíces del polinomio buscado son $-4i$, $4i$, $-5+2i$ y $-5-2i$.

Por tanto, el polinomio es cualquiera proporcional a:

$$(x-(-4i))\ (x-4i)\ (x-(-5+2i))\ (x-(-5-2i)) = (x+4i)\ (x-4i)\ (x+5-2i)\ (x+5+2i) =$$

$$= (x^2 - 16i^2)\ ((x+5)^2 - 4i^2) = (x^2+16)\ (x^2+10x+25+4) = (x^2+16)\ (x^2+10x+29) =$$

$$= x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$$

5. Dada una ecuación polinómica de grado 4 de coeficientes reales, responder a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántas soluciones imaginarias puede tener si una de sus raíces es real?

b) Si $8i$ y $5-3i$, son dos soluciones, ¿cuáles son las otras soluciones?

Solución

a) Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces reales o imaginarias. Teniendo en cuenta que si tiene una raíz imaginaria tiene también su conjugada y que una de sus raíces es real, se deduce que este polinomio de grado 4 o no tiene raíces imaginarias o tiene 2.

b) Teniendo en cuenta que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz imaginaria tiene también a su conjugada, las otras dos soluciones serán las conjugadas de las dadas, es decir, $-8i$ y $5+3i$.

6. Resolver en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ **b)** $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ **c)** $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Solución

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 3t - 10 = 0$, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

- Considerando la solución $t = -5$, se obtiene $x^2 = -5$, de donde $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,\sqrt{-1} = \pm\sqrt{5}\,i$
- Considerando la solución $t = 2$, se obtiene $x^2 = 2$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$

Por tanto, las soluciones en $\mathbb{R}$ son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ y las soluciones en $\mathbb{C}$ son, además de las dos anteriores, $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

b) Factorizando el polinomio, la ecuación $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ queda $x(x^2+5x+6) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $x^2 + 5x + 6 = 0$, de donde, $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$ son $x = 0$, $x = -2$ y $x = -3$.

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada, por lo que haciendo $t = x^2$ se obtiene la ecuación polinómica de segundo grado, $t^2 + 2t + 1 = 0$, que se puede escribir de la forma, $(t+1)^2 = 0$, cuya solución es $t = -1$, doble.

Considerando la solución $t = -1$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Por tanto, la ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$ y las soluciones en $\mathbb{C}$ son $x = i$ y $x = -i$, dobles.

7. Determinar el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

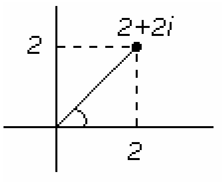
a) $2+2i$ **b)** $-2+2i$ **c)** $2-2i$ **d)** $-2-2i$ **e)** $-\sqrt{5}$ **f)** $\frac{5}{3}i$ **g)** $\sqrt{3}+i$

Solución

En todos los apartados se representa el número complejo para ayudar a determinar su argumento.

a) El módulo y el argumento de $2+2i$ son:

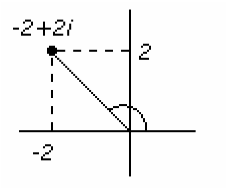
$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2+2i) = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2+2i$ es $(2\sqrt{2})_{\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) El módulo y el argumento de $-2+2i$ son:

$$|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(-2+2i) = \operatorname{arctg}\frac{2}{-2} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

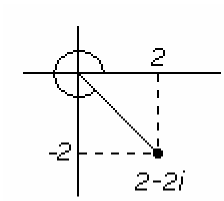


Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $-2+2i$ son, respectivamente:

$$|-2+2i| = (2\sqrt{2})_{3\pi/4} \qquad |-2+2i| = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

c) El módulo y el argumento de $2-2i$ son:

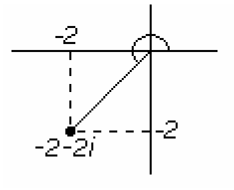
$$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2-2i) = \operatorname{arctg}\frac{-2}{2} = \operatorname{arctg} -1 = \frac{7\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

d) El módulo y el argumento de -2-2i son:

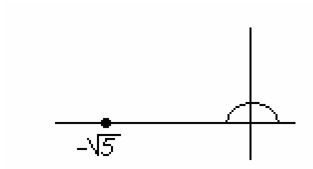
$$|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(-2-2i) = \text{arctg}\frac{-2}{-2} = \text{arctg}\,1 = \frac{5\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de -2-2i es $(2\sqrt{2})_{5\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$.

e) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $-\sqrt{5}$ son:

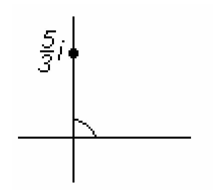
$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$
$$\arg(-\sqrt{5}) = \pi$$



Por tanto, la forma polar de $-\sqrt{5}$ es $\sqrt{5}_{\pi}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{5}\,(\cos\pi + i\,\text{sen}\pi)$

f) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $\frac{5}{3}i$ son:

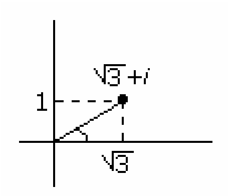
$$\left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3}$$
$$\arg\left(\frac{5}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$$



Por tanto, la forma polar de $\frac{5}{3}i$ es $\left(\frac{5}{3}\right)_{\pi/2}$ y la forma trigonométrica $\frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

g) El módulo y el argumento de $\sqrt{3} + i$ son:

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\arg(\sqrt{3} + i) = \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $\sqrt{3} + i$ son, respectivamente:

$$\sqrt{3} + i = 2_{\pi/6} \qquad \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

8. Determinar la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $1_{3\pi/4}$ **d)** $\sqrt{2}_{\pi/3}$

Solución

a) El número complejo $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) El número complejo $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ está dado en forma trigonométrica y para obtener su forma binómica basta hacer operaciones, así:

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 3\ (0+i1) = 3i$$

c) El número complejo $1_{3\pi/4}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$1_{3\pi/4} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i$$

d) El número complejo $\sqrt{2}_{\pi/3}$ está dado en forma polar, para obtener su forma binómica basta escribir su forma trigonométrica y hacer operaciones, así:

$$\sqrt{2}_{\pi/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\ i$$

9. Dados los números complejos $z_1 = 2-i$, $z_2 = 4_\pi$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ y $z_4 = 1-\sqrt{3}\,i$, realizar las operaciones que se indican a continuación expresando los resultados en forma binómica:

a) $z_1\ z_2$ **b)** $z_1 + z_3$ **c)** $z_4{}^3$ **d)** $z_1 z_3$

e) $\frac{z_2}{z_3}$ **f)** $\sqrt{z_2}$ **g)** $z_2{}^4$ **h)** $\sqrt[3]{z_3}$

Solución

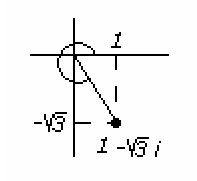
En este ejercicio hay que tener en cuenta que para realizar una operación entre dos números complejos, ambos deben estar escritos de la misma forma: binómica, polar o trigonométrica.

a) Expresando z_2 en forma binómica se tiene $z_2 = 4_\pi = 4(\cos\pi + i\text{sen}\pi) = 4(-1+i0) = -4$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene $z_1\ z_2 = (2-i)(-4) = -8+4i$.

b) Expresando z_3 en forma binómica queda $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y sumando este resultado con z_1 se obtiene $z_1 + z_3 = 2 - i + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}-2}{2}i$.

c) El cálculo de potencias de un número complejo se simplifica si éste se expresa en forma polar o trigonométrica.

Para calcular la expresión polar de $z_4 = 1 - \sqrt{3}\,i$ es necesario calcular su módulo y su argumento:



$$|1 - \sqrt{3}\,i\,| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(1 - \sqrt{3}\,i) = \mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{5\pi}{3}$$

y así la forma polar de $1 - \sqrt{3}\,i$ es $2_{5\pi/3}$

Por tanto, $z_4^{\,3} = \left(2_{5\pi/3}\right)^3 = 2^3_{\;3.5\pi/3} = 8_{5\pi} = 8_\pi$

Y la expresión binómica del resultado es $z_4^{\,3} = 8_\pi = 8(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi) = 8(-1+0i) = -8$

d) La forma binómica de z_3, obtenida en el apartado b), es $z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$, y multiplicando este resultado por z_1 se obtiene:

$$z_1 z_3 = (2-i)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

e) En este caso resulta más sencillo calcular el cociente en forma polar, para lo que se deben expresar numerador y denominador en dicha forma:

$z_2 = 4_\pi$

$z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 3_{\pi/4}$

y realizando la división queda $\frac{z_2}{z_3} = \frac{4_\pi}{3_{\pi/4}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{\pi-\pi/4} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4}$

Expresando el resultado en forma binómica queda:

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{4}{3}\right)_{3\pi/4} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

f) Al estar z_2 expresado en forma polar, sus raíces cuadradas se pueden calcular de forma sencilla.

Las raíces cuadradas de $z_2 = 4_\pi$ son:

$$\sqrt{4}_{(\pi+2k\pi)/2} \text{ para } k = 0, 1 \text{ es decir, } 2_{\pi/2} \text{ y } 2_{3\pi/2}$$

La forma binómica de cada una de las dos raíces es:

$$2_{\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i1) = 2i$$

$$2_{3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0+i(-1)) = -2i$$

Notar que en este caso al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su raíz cuadrada se puede calcular como sigue:

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\,\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

g) Al estar z_2 expresado en forma polar, el cálculo de su cuarta potencia es inmediato,

$$z_2{}^4 = (4_\pi)^4 = 4^4{}_{4\pi} = 256_0$$

que expresado en forma binómica es $z_2{}^4 = 256_0 = 256(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}0) = 256(1+i0) = 256$

Como en el apartado anterior, notar que al ser $z_2 = 4_\pi = -4$, un número real, su potencia cuarta se puede calcular como sigue:

$$z_2{}^4 = (-4)^4 = 256$$

h) Como $z_3 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ tiene por expresión polar $z_3 = 3_{\pi/4}$, sus raíces cúbicas son:

$$\sqrt[3]{3}_{(\pi/4+2k\pi)/3} \text{ para } k = 0, 1, 2 \text{ es decir, } \sqrt[3]{3}_{\pi/12},\ \sqrt[3]{3}_{9\pi/12} \text{ y } \sqrt[3]{3}_{17\pi/12}$$

La forma binómica de cada una de las tres raíces es:

$$\sqrt[3]{3}_{\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{9\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{9\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{12}$$

$$\sqrt[3]{3}_{17\pi/8} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{3}\cos\frac{17\pi}{12} + i\sqrt[3]{3}\,\mathrm{sen}\frac{17\pi}{12}$$