

## EJERCICIOS DE LOGARITMOS.

1.- Resuelve aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_2 8 = 3 \quad (2^3 = 8)$$

$$\log_2 16 = 4 \quad (2^4 = 16)$$

$$\log_3 9 = 2 \quad (3^2 = 9)$$

$$\log 100 = 2 \quad (10^2 = 100)$$

$$\log_6 1 = 0 \quad (6^0 = 1)$$

$$\log_7 \frac{1}{7} = -1 \quad \left(7^{-1} = \frac{1}{7}\right)$$

$$\log_4 4 = 1 \quad (4^1 = 4)$$

$$\log_2 4 = 2 \quad (2^2 = 4)$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2\right)$$

$$\log_5 1 = 0 \quad (5^0 = 1)$$

$$\log_5 5 = 1 \quad (5^1 = 5)$$

$$\log_3 27 = 3 \quad (3^3 = 27)$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \quad \left(3^{-2} = \frac{1}{9}\right)$$

$$\log_3 243 = 5 \quad (3^5 = 243)$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad \left(2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\right)$$

2.- Resuelve aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_3 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \quad \left(3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}\right)$$

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad \left(3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}\right)$$

$$\log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3} \quad \left(5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}\right)$$

$$\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3} \quad \left(7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}\right)$$

$$\log_6 \frac{1}{6} = -1 \quad (6^{-1} = \frac{1}{6})$$

$$\log_8 \frac{1}{64} = -2 \quad (8^{-2} = \frac{1}{64})$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad \left(2^{-3} = \frac{1}{8}\right)$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = -2 \quad \left(5^{-2} = \frac{1}{25}\right)$$

$$\log \frac{1}{1000} = -3 \quad \left(10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}\right)$$

$$\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \quad \left(27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3\right)$$

$$\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \quad \left(5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}\right)$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad \left(3^{-3} = \frac{1}{27}\right)$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \quad \left(25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5\right)$$

$$\log_{49} 7 = \frac{1}{2} \quad \left(49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7\right)$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \quad \left(125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5\right)$$

3.- Calcula el valor de x que satisface las siguientes igualdades:

$$\log_2 x = 4 ; x = 2^4 = 16$$

$$\log_x 4 = 2 ; x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2} ; x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\log_3 x = 2 ; x = 3^2 = 9$$

$$\log_x 8 = 3 ; x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\log_x 16 = 4 ; x^4 = 16 \rightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\log_5 x = -2 ; x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$\log_x 100 = 2 ; x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} = 10$$

$$\log_x 30 = 1 ; x^1 = 30 \rightarrow x = 30$$

4.- Calcula sin utilizar la calculadora y comprueba:

a)  $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$  comprobamos:  $2^6 = 64$

b)  $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$  comprobamos:  $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$

c)  $\log 0'0001 = \log \frac{1}{10000} = \log \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \log 10^{-4} = -4$  comprobamos:  $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001$

d)  $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$  Como  $343 = 7^3 \rightarrow 7 = \sqrt[3]{343} = 343^{\frac{1}{3}}$ ; luego  $\log_{343} 7 = \log_{343} 343^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

e)  $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$  comprobamos:  $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f)  $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \log_3 3^{-4} = -4$  comprobamos:  $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

5.- Calcula utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\text{a) } \log 0'001 = \log \frac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3$$

*lo escribo como número racional*      *Lo escribo como resta.*      *Doy los valores a los logaritmos*

O bien:

$$\log 0'001 = \log \frac{1}{1000} = \log \left( \frac{1}{10} \right)^3 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3$$

*lo escribo como número racional*      *Lo escribo como potencia*      *Lo paso a potencia de la base*      *bajo el exponente*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{b) } 2 \log 9 - \log 81 = \log 9^2 - \log 81 = \log 81 - \log 81 = 0 \quad \text{o bien:}$$

*Pongo los exponentes*      *Elevo*      *Como se resta la misma cosa...*

$$2 \log 9 - \log 81 = 2 \cdot \log 3^2 - \log 3^4 = 2 \cdot 2 \cdot \log 3 - 4 \cdot \log 3 = 4 \log 3 - 4 \log 3 = 0$$

*Factorizo las potencias.*      *Bajo los exponentes.*      *Como se resta la misma cantidad...*

$$\text{c) } \log 0'5 + \log 2 = \log (0,5 \cdot 2) = \log 1 = 0 \quad \text{o bien:}$$

*La suma de logaritmos es el logaritmo del producto*       $10^0=1$

$$\log 0'5 + \log 2 = \log \frac{1}{2} + \log 2 = \log 2^{-1} + \log 2 = -\log 2 + \log 2 = 0$$

*Escribimos el decimal como fracción*      *Escribo la fracción como potencia*      *Bajo los exponentes.*      *Como se resta la misma cosa...*

$$\text{O bien: } \log 0'5 + \log 2 = \log \frac{1}{2} + \log 2 = \log 1 - \log 2 + \log 2 = \log 1 = 0$$

*Escribimos el decimal como fracción*      *Desarrollo la fracción.*      *Como se resta la misma cosa...*

$$\text{d) } \log 4 + \log \frac{1}{8} + \log 2 = \log \left( \frac{4 \cdot 2}{8} \right) = \log \left( \frac{8}{8} \right) = \log 1 = 0 \quad \text{o bien:}$$

*Es el logaritmo de un producto.*

$$\log 4 + \log \frac{1}{8} + \log 2 = \log 2^2 + \log 2^{-3} + \log 2 = 2 \log 2 - 3 \log 2 + \log 2 = (2 - 3 + 1) \cdot \log 2 = 0$$

*Son potencias de dos*      *Bajo los exponentes.*      *Saco factor común*       $0$

$$\text{O bien: } \log 4 + \log \frac{1}{8} + \log 2 = \log \left( \frac{4 \cdot 2}{8} \right) = \log 1 = 0$$

*La suma de logaritmos es el logaritmo del producto*       $10^0=1$

$$\text{e) } \log 1000 - \log 10 = \log 10^3 - \log 10 = 3 - 1 = 2$$

*Escribo como potencias*      *Por la definición de logaritmo decim.*

$$\log 1000 - \log 10 = \log 10^3 - \log 10 = 3 \cdot \log 10 - \log 10 = (3-1) \cdot \log 10 = 2$$

*Escribo mil como potencia.*      *Bajo los exponentes*      *Saco factor común.*      *Es dos*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{O bien: } \log 1000 - \log 10 = \log \frac{1000}{10} = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

*Es el logaritmo de una división*      *Divido*      *Factorizo*      *Bajo Exponente*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{f) } \log 50 + \log 2 = \log \frac{100}{2} + \log 2 = \log 100 - \log 2 + \log 2 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2$$

*El logaritmo de una división...*      *Los log2 se anulan*      *Bajo exponente.*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{O bien: } \log 50 + \log 2 = \log (50 \cdot 2) = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

*logaritmo de un producto*      *Multiplico*      *Como  $100=10 \cdot 10$*       *Bajo exponente*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{g) } \log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1$$

*Escribo el decimal como fracción.*      *Desarrollo la división*

$$\log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1 \cdot \log 10 = -1$$

*Escribo el decimal como fracción.*      *Escribo la fracción como potencia de la base.*      *Bajo el exponente*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{h) } 4 \cdot (\log 2 + \log 5) - 3 \cdot \log 10 = 4 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 10 = (4-3) \cdot \log 10 = 1$$

*La suma de logaritmos es el log de la multiplicación*      *Saco factor común*      *Como  $\log_{10} 10=1$*

$$\text{i) } 2 \cdot \left( \log 8 + \log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{4} \right) \stackrel{\substack{\text{La suma de logaritmos es el} \\ \text{logaritmo del producto}}}{=} 2 \cdot \log \left( \frac{8}{2 \cdot 4} \right) = 2 \cdot \log 1 \stackrel{\log_{10} 1 = 0}{=} 0$$

O bien:

$$2 \cdot \left( \log 8 + \log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{4} \right) \stackrel{\substack{\text{Argumentos} \\ \text{como potencias}}}{=} 2 \cdot (\log 2^3 + \log 2^{-1} + \log 2^{-2}) \stackrel{\substack{\text{Bajo los} \\ \text{exponentes}}}{=} 2 \cdot (3 \cdot \log 2 - \log 2 - 2 \cdot \log 2) \stackrel{\substack{\text{Saco factor} \\ \text{común}}}{=} 2 \cdot \underbrace{(3 - 1 - 2)}_{\text{Es cero}} \cdot \log 2 = 0$$

$$\text{j) } \log 0,0001 \stackrel{\substack{\text{Escribo el decimal} \\ \text{como fracción.}}}{=} \log \frac{1}{10000} \stackrel{\substack{\text{Escribo la fracción} \\ \text{como resta}}}{=} \log 1 - \log 10.000 = 0 - 4 = -4$$

$$\log 0,0001 \stackrel{\substack{\text{Escribo el decimal} \\ \text{como fracción.}}}{=} \log \frac{1}{10000} \stackrel{\substack{\text{Escribo la fracción} \\ \text{como potencia de la base.}}}{=} \log 10^{-4} \stackrel{\substack{\text{Bajo el} \\ \text{exponente}}}{=} -4 \cdot \log 10 \stackrel{\substack{\text{Como } \log_{10} 10 = 1}}{}}{=} -4$$

$$\text{k) } 3 \log 3 - \log 27 \stackrel{\substack{\text{Escribo multiplicación} \\ \text{como potencia.}}}{=} \log 3^3 - \log 27 \stackrel{\substack{\text{Calculo la} \\ \text{potencia}}}{=} \log 27 - \log 27 \stackrel{\substack{\text{Se resta la} \\ \text{misma cantidad.}}}{=} 0$$

6.- Calcula el valor de:

$$\text{a) } \log 0,01 = \log \frac{1}{100} = \log \left( \frac{1}{10} \right)^2 = \log 10^{-2} = -2 \cdot \log 10 = -2$$

$$\text{b) } \log \sqrt{1000} = \log \sqrt{10^3} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \log 10 = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \log 125 + \log 8 = \log 1000 = 3$$

$$\text{d) } \log 5 - \log 500 = \log \frac{5}{500} = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2 \quad \text{O bien:}$$

$$\log 5 - \log 500 = \log 5 - \log (5 \cdot 100) = \log 5 - (\log 5 + \log 100) = \log 5 - \log 5 - \log 100 = -2$$

$$\text{e) } 2 \log 3 - \log 9 = 2 \log 3 - \log 3^2 = 2 \log 3 - 2 \log 3 = 0 \quad \text{O bien:}$$

$$2 \log 3 - \log 9 = \log 3^2 - \log 9 = \log 9 - \log 9 = 0$$

$$\text{f) } \log 0,02 + \log 5 = \log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1 \quad \text{O bien:}$$

$$\log 0,02 + \log 5 = \log \frac{1}{50} + \log 5 = \log \frac{1}{5 \cdot 10} + \log 5 = \log 1 - \log 50 + \log 5 = -(\log 5 + \log 10) + \log 5 = -\log 5 - \log 10 + \log 5 = -\log 10 = -1$$

$$\text{O bien: } \log 0,02 + \log 5 = \log (0,02 \cdot 5) = \log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1$$

$$\text{g) } \log 2500 - 2 \log 5 = \log (25 \cdot 100) - \log 5^2 = \log 25 + \log 100 - \log 25 = \log 100 = 2 \quad \text{O bien:}$$

$$\log 2500 - 2 \log 5 = \log \left( 25^2 \cdot 100 \right) - 2 \log 5 = \log 5^2 + \log 100 - 2 \log 5 = 2 \log 5 + 2 - 2 \log 5 = 2$$

$$\text{h) } \log \frac{1}{5} + \log 5 = \log 1 - \log 5 + \log 5 = \log 1 = 0 \quad \text{O bien:}$$

$$\log \frac{1}{5} + \log 5 = \log 5^{-1} + \log 5 = -\log 5 + \log 5 = 0$$

i)  $\log 1000 - \log 100 = 3 - 2 = 1$  O bien:

$$\log 1000 - \log 100 = \log 10^3 - \log 10^2 = 3 \cdot \log 10 - 2 \cdot \log 10 = (3 - 2) \cdot \log 10 = 1$$

7.- Calcula utilizando las propiedades de los logaritmos y sin utilizar la calculadora.

a)  $\log 40 - \log 400 = \log 40 - \log(40 \cdot 10) = \log 40 - (\log 40 + \log 10) = \log 40 - \log 40 - \log 10 = -1$

b)  $\log \sqrt[4]{1000} = \log \sqrt[4]{10^3} = \log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \log 10 = \frac{3}{4}$

c)  $\log 0'001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3$

d)  $7 \log 10 - 3(\log 25 + \log 4) = 7 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 100 = 7 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 10^2 = 7 \cdot \log 10 - 6 \cdot \log 10 = \log 10 = 1$

8.- Completa los huecos para que sean ciertas las siguientes igualdades:

a)  $\log \underline{7} + \log 3 = \log 21$

d)  $\log \underline{9} = 2 \cdot \log 3$

b)  $\log 16 = \underline{4} \cdot \log 2$

e)  $\log 8 - \log 2 = \log \underline{4}$

c)  $\log \sqrt{8} = \underline{\log \sqrt{2}} \cdot \log 2$

f)  $\log 28 = \log \underline{7} + \underline{2} \cdot \log 2$

g)  $\log 72 = \log (\underline{2}^3 \cdot \underline{3}^2) = \log \underline{2}^3 + \log \underline{3}^2 = \underline{3} \cdot \log 2 + 2 \cdot \log \underline{3}$

9.- Indica si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades y razona tu respuesta:

a)  $\log 100 = \log 50 + \log 2$  CIERTO porque:  $\log 50 + \log 2 = \log(50 \cdot 2) = \log 100$

b)  $\log 100 = 2 \cdot \log 50$  FALSO porque:  $2 \cdot \log 50 = \log 50^2 = \log 2500$ , no  $\log 100$ .

c)  $\log 4 = 2 \cdot \log 2$  CIERTO porque:  $2 \log 2 = \log 2^2 = \log 4$

d)  $\log 10 = \log 5 + \log 5$  FALSO porque:  $\log 5 + \log 5 = \log(5 \cdot 5) = \log 25$ , no  $\log 10$ .

10.- Sin utilizar la calculadora, halla, como en el ejemplo, los siguientes logaritmos:

Ejemplo:  $\log_3 729 = \frac{\log 729}{\log 3} = \frac{\log 3^6}{\log 3} = \frac{6 \cdot \log 3}{\log 3} = 6$

a)  $\log_5 625 = \frac{\log 625}{\log 5} = \frac{\log 5^4}{\log 5} = \frac{4 \cdot \log 5}{\log 5} = 4$

b)  $\log_6 216 = \frac{\log 216}{\log 6} = \frac{\log 6^3}{\log 6} = \frac{3 \cdot \log 6}{\log 6} = 3$

c)  $\log_3 243 = \log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 3} = \frac{\log 3^5}{\log 3} = \frac{5 \cdot \log 3}{\log 3} = 5$

11.- Expresa en función de  $\log 2$  :

a)  $\log 32 + \log 4 + \log 8 = \log 2^5 + \log 2^2 + \log 2^3 = 5 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 2 = (5 + 2 + 3) \cdot \log 2 = 10 \cdot \log 2$

$$\text{b) } (\log 8 - \log 2) + (\log 6 - \log 3) = \log \frac{8}{2} + \log \frac{6}{3} = \log 4 + \log 2 = \log(4 \cdot 2) = \log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2$$

$$\text{c) } \log 1024 + \log \sqrt{8} - \log 160 = \log 2^{10} + \log 2^{\frac{3}{2}} - (\log 2^4 + \log 10) = 10 \log 2 + \frac{3}{2} \log 2 - 4 \log 2 - 1 =$$

$$= \left(10 + \frac{3}{2} - 4\right) \cdot \log 2 - 1 = \frac{19}{2} \cdot \log 2 - 1$$

12.- Expresa en función de log 3:

$$\text{a) } \log 9 - 3 \cdot \log 3 = \log 3^2 - 3 \cdot \log 3 = 2 \log 3 - 3 \cdot \log 3 = (2 - 3) \cdot \log 3 = -\log 3$$

$$\text{b) } \log \frac{1}{3} + \log 27 - \log 3 = \log 3^{-1} + \log 3^3 - \log 3 = -\log 3 + 3 \log 3 - \log 3 = (1 + 3 - 1) \cdot \log 3 = \log 3$$

$$\text{c) } \log \sqrt[2]{18} - (\log 3 + \log 2) = (\log 2 + \log 3^2) - (\log 3 + \log 2) = \log 2 + 2 \log 3 - \log 3 - \log 2 = \log 3$$

$$\text{d) } \log \sqrt[2]{54} + 2 \log 2 - \log \sqrt[2]{8} = (\log 2 + \log 3^3) + 2 \log 2 - \log 2^3 = \log 2 + 3 \log 3 + 2 \log 2 - 3 \log 2 =$$

$$= 3 \log 3 + \log 2 + 2 \log 2 - 3 \log 2 = 3 \log 3 + \overbrace{(1 + 2 - 3)}^0 \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 3$$

$$\text{e) } \log \sqrt[27]{1000} - \left( \log \sqrt[3]{30} + \log 3 \right) = \log 3^3 + \log 10^3 - (\log 3 + \log 10 + \log 3) =$$

$$3 \log 3 + 3 \log 10 - \log 3 - \log 3 - \log 10 = \overbrace{(3 - 1 - 1)}^1 \cdot \log 3 + \overbrace{(3 - 1)}^2 \cdot \overbrace{\log 10}^1 = \log 3 + 2$$

13.- Expresa en función de log 5:

$$\text{a) } \log 25 - 3 \cdot \log \frac{1}{5} = \log 5^2 - 3 \cdot \left( \overbrace{\log 1}^0 - \log 5 \right) = 2 \log 5 + 3 \cdot \log 5 = 5 \cdot \log 5 \quad \text{O bien:}$$

$$\log 25 - 3 \cdot \log \frac{1}{5} = \log 5^2 - 3 \cdot \log 5^{-1} = 2 \log 5 + 3 \cdot \log 5 = 5 \cdot \log 5$$

$$\text{b) } \log \sqrt[3]{75} - 2 \log 3 + \log \sqrt[3]{15} = \log 3 + \log 5^2 - 2 \log 3 + \log 3 + \log 5 = \log 3 + 2 \log 5 - 2 \log 3 + \log 3 + \log 5 =$$

$$= \overbrace{(1 - 2 + 1)}^0 \cdot \log 3 + \overbrace{(2 + 1)}^3 \cdot \log 5 = 3 \log 5$$

14.- Sabiendo que  $\log 2 = 0,301$  calcula:

$$\text{a) } \log 160 = \log(16 \cdot 10) = \log 16 + \log 10 = \log 2^4 + \overbrace{\log 10}^1 = 4 \cdot \log 2 + 1 \cong 4 \cdot 0,301 + 1 = 2,204$$

$$\text{b) } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0,301 = 0,699$$

$$\text{c) } \log 0,02 = \log \frac{2}{100} = \log 2 - \log 100 \cong 0,301 - 2 = -1,699$$

$$\text{d) } \log \sqrt[3]{16} = \log(2^4)^{\frac{1}{3}} = \log 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \log 2 \cong \frac{4}{3} \cdot 0,301 \cong 0,401$$

$$\text{e) } \log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 \cong 3 \cdot 0,301 = 0,903$$

$$\text{f) } \log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 \cong \frac{1}{2} \cdot 0,301 = 0,1505$$

$$\text{g) } \log 0,64 = \log \frac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 6 \cdot \log 2 - 2 \cong 6 \cdot 0,301 - 2 = -0,194$$

$$\text{h) } \log \frac{1}{128} = \log \left( \frac{1}{2} \right)^7 = \log 2^{-7} = -7 \cdot \log 2 \cong -7 \cdot \log 2 = -2,107$$

15.- Sabiendo que  $\log 2 = 0,3010$ , calcula el valor de:

$$\text{a) } \log 64 = \log 2^6 = 6 \cdot \log 2 \cong 6 \cdot 0,301 = 1,806$$

$$\text{b) } \log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 \cong \frac{1}{2} \cdot 0,301 \cong 0,1505$$

$$\text{c) } \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \cong -0,301$$

$$\text{d) } \log 2000 = \log(2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 \cong 0,301 + 3 = 3,301$$

$$\text{e) } \log 40 = \log(4 \cdot 10) = \log 4 + \log 10 = \log 2^2 + \log 10 = 2 \log 2 + \log 10 \cong 2 \cdot 0,301 + 1 = 1,602$$

$$\text{f) } \log \sqrt{32} = \log(2^5)^{\frac{1}{2}} = \log 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \log 2 \cong \frac{5}{2} \cdot 0,301 = 0,7525$$

$$\text{g) } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0,301 = 0,699$$

16.- Sabiendo que  $\log 2 = 0,3010$  y  $\log 3 = 0,4771$  calcula el valor de:

$$\text{a) } \log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \cong 0,301 + 0,4771 = 0,7781$$

$$\text{b) } \log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3 \cong 4 \cdot 0,4771 = 1,9084$$

$$\text{c) } \log 1,5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \cong 0,4771 - 0,301 = 0,1761$$

$$\text{d) } \log 0,09 = \log \frac{9}{100} = \log 9 - \log 100 = \log 3^2 - \log 100 = 2 \cdot \log 3 - 2 \cong 2 \cdot 0,4771 - 2 = -1,0458$$

$$\text{e) } \log \sqrt{18} = \log(2 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}} = \log \left( 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} \right) = \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 3 = \frac{1}{2} \cdot \log 2 + \log 3 \cong \frac{1}{2} \cdot 0,301 + 0,4771 = 0,6276$$

$$\text{f) } \log \frac{4}{27} = \log 4 - \log 27 = \log 2^2 - \log 3^3 = 2 \log 2 - 3 \log 3 \cong 2 \cdot 0,301 - 3 \cdot 0,4771 = -0,8293$$

$$\text{g) } \log \frac{1}{240} = \overbrace{\log 1}^0 - \log \overbrace{240}^{3 \cdot 8 \cdot 10} = -\log 3 - \log 2^3 - \log 10 = -\log 3 - 3 \log 2 - \log 10 \cong -0,4771 - 3 \cdot 0,301 - 1 = -2,3801$$

$$\text{h) } \log 36 = \log 6^2 = 2 \log 6 = 2 \cdot (\log 2 + \log 3) \cong 2 \cdot (0,301 + 0,4771) = 1,5562$$

17.- Sabiendo que  $\log 5 = 0,69$ , calcula:

$$\text{a) } \log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 \cong 2 \cdot 0,69 = 1,4$$

$$\text{b) } \log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 \cong 0,69 + 1 = 1,7$$

$$\text{c) } \log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 5 \cong \frac{1}{2} \cdot 0,69 = 0,35$$

$$\text{d) } \log 25000 = \log 25000 = \log 25 + \log 1000 = \log 5^2 + \log 10^3 = 2 \log 5 + 3 \log 10 \cong 2 \cdot 0,69 + 3 \cdot 1 = 4,4$$

$$\text{e) } \log 0,005 = \log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000 \cong 0,69 - 3 = -2,31$$

$$\text{f) } \log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 \cong 1 - 0,69 = 0,31$$

18.- Sabiendo que  $\log 2 = 0,301$  y  $\log 3 = 0,477$ , calcula:

$$\text{a) } \log 60 = \log(2 \cdot 3 \cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 \cong 0,301 + 0,477 + 1 = 1,778$$

$$\text{b) } \log 0,006 = \log \frac{6}{1000} = \log 6 - \log 1000 = \log 2 + \log 3 - \log 1000 \cong 0,301 + 0,477 - 3 = -2,222$$

$$\text{c) } \log 18 = \log 18 = \log(2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2 \log 3 \cong 0,301 + 2 \cdot 0,477 = 1,255$$

$$\text{d) } \log \frac{0,02}{3} = \log 0,02 - \log 3 = \log \frac{2}{100} - \log 3 = \log 2 - \log 100 - \log 3 \cong 0,301 - 2 - 0,477 = -2,176$$

$$\text{e) } \log \frac{40}{3} = \log 40 - \log 3 = \log 2^2 + \log 10 - \log 3 = 2 \log 2 + \log 10 - \log 3 \cong 2 \cdot 0,301 + 1 - 0,477 = 1,125$$

19.- Sabiendo que  $\log 2 = 0,301$  y  $\log 5 = 0,699$ , calcula:

$$\text{a) } \log 2,5 = \log \frac{25}{10} = \log 25 - \log 10 = \log 5^2 - \log 10 = 2 \log 5 - \log 10 \cong 2 \cdot 0,699 - 1 = 0,398$$

$$\text{b) } \log 0,2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 \cong 0,301 - 1 = -0,699$$

$$\text{c) } \log 0,5 = \log \frac{5}{10} = \log 5 - \log 10 \cong 0,699 - 1 = -0,301 \quad \text{o bien: } \log 0,5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \cong -0,301$$

$$\text{d) } \log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 \cong 2 \cdot 0,699 = 1,398$$

$$\text{e) } \log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 \cong 2 \cdot 0,301 = 0,602$$

20.- Expresa con un solo logaritmo:

$$\text{a) } \log 6 + \log 8 - \log 3 = \log 6 + \log 8 - \log 3 = \log \frac{6 \cdot 8}{3} = \log 16$$

$$\text{b) } 2 \log 9 + \log 28 - (\log 21 - \log 3) = \log 9^2 + \log 28 - \log 21 + \log 3 = \log \frac{81 \cdot 28 \cdot 3}{21} = \log 324$$

$$\text{c) } \log 3 + 2 - \log 5 = \log 3 + \log 100 - \log 5 = \log \frac{3 \cdot 100}{5} = \log 60$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left( \frac{1}{3} \log 8 + \log 12 \right) - (\log 2 + \log 3) &= \left( \log (2^3)^{\frac{1}{3}} + \log 12 \right) - (\log 2 + \log 3) = (\log 2^1 + \log 12) - (\log 2 + \log 3) = \\ &= \log \frac{2 \cdot 12}{2 \cdot 3} = \log 4 \end{aligned}$$

21.- Expresa con un solo logaritmo las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \log 6 + \log 2 - \log 3 = \log \frac{6 \cdot 2}{3} = \log 4$$

$$\text{b) } 2 \cdot \log 2 + \log 36 - \log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 36 - \log 12 = \log 2^2 + \log 36 - \log 12 = \log \frac{4 \cdot 36}{12} = \log 12$$

$$\text{c) } (\overbrace{\log 3 + \log 25}^{\log(3 \cdot 25)}) - \left( \frac{1}{2} \cdot \log 9^{\frac{3^2}{2}} + \log 5 \right) = (\log 75) - \left( \overbrace{\log(3^2)^{\frac{1}{2}} + \log 5}^{\substack{\log(3 \cdot 5) \\ \text{Da 3}}} \right) = \log 75 - \log 15 = \log \frac{75}{15} = \log 5$$

$$\text{d) } 3 \cdot (\log 8 - \log 4) + \log 3 = 3 \cdot \log \frac{8}{4} + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 = \log 8 + \log 3 = \log 24$$

$$\text{e) } \log 16000 - (\log 40 + \log 2) = \log 16000 - (\log 80) = \log \frac{16000}{80} = \log 200$$

$$\text{f) } \log 5 + 1 = \log 5 + \log 10 = \log 50$$

$$\text{g) } 2 - \log 4 = \log 100 - \log 4 = \log \frac{100}{4} = \log 25$$

$$\text{h) } 3 + \log 3 - \log 5 = \log 1000 + \log 3 - \log 5 = \log \frac{1000 \cdot 3}{5} = \log 600$$

22.- Expresa con un solo logaritmo:

$$\text{a) } \log 4 + \log 3 + 2 \log 3 = \log 4 + \log 3 + \log 3^2 = \log(4 \cdot 3 \cdot 9) = \log 108$$

$$\text{b) } 4 \log 2 - \log 4 = \log 2^4 - \log 4 = \log 16 - \log 4 = \log \frac{16}{4} = \log 4$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \log 9 - \log 3 = \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3 = \log \sqrt{9} - \log 3 = \log \frac{\sqrt{9}}{3} = \log 1 = 0$$

$$\text{d) } \frac{1}{2} \cdot \log 2 - \log 5 = \log 2^{\frac{1}{2}} - \log 5 = \log \sqrt{2} - \log 5 = \log \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{e) } \log \frac{1}{5} + \log 5 + \log 3 = \log 5^{-1} + \log 5 + \log 3 = -\log 5 + \log 5 + \log 3 = \log 3$$

$$\text{f) } \log 4 + \log 6 - \log 6 = \log 4$$

$$\text{g) } \log 0'2 + \log 5 = \log(0,2 \cdot 5) = \log 1 = 0$$

$$\text{h) } 2 \log 3 - \log 9 = \log 3^2 - \log 9 = \log 9 - \log 9 = 0$$

23.- Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \log C = 2 \log x - \log y + 3$$

$$\text{b) } \log B = 2 \log x - 3 \log y + 5 \log z$$

$$\text{c) } \log D = 1 - \log x + 3 \log z$$

$$\log C = \log x^2 - \log y + \log 1000$$

$$\log B = \log x^2 - \log y^3 + \log z^5$$

$$\log D = \log 10 - \log x + \log z^3$$

$$\log C = \log \frac{1000x^2}{y}$$

$$\log B = \log \frac{x^2 z^5}{y^3}$$

$$\log D = \log \frac{10z^3}{x}$$

$$C = \frac{1000x^2}{y}$$

$$B = \frac{x^2 z^5}{y^3}$$

$$D = \frac{10z^3}{x}$$

24.-Escribe como un único logaritmo las siguientes expresiones:



$$\text{a) } \log_3 a + 5\log_3 a^2 = \log_3 a + \log_3 (a^2)^5 = \log_3 a + \log_3 a^{10} = \log_3 (a \cdot a^{10}) = \log_3 a^{11}$$

$$\text{b) } 2\log_5 a - 5\log_5 \sqrt{a} = \log_5 a^2 - \log_5 \sqrt{a^5} = \log_5 \frac{a^2}{\sqrt{a^5}} = \log_5 \sqrt{\frac{a^4}{a^5}} = \log_5 \sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$\text{c) } 3\log_6 a + 2\log_6 \sqrt{a} - 4\log_6 \sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6 \sqrt{a^2} - \log_6 \sqrt[3]{a^4} = \log_6 \frac{a^3 \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^4}} = \log_6 \frac{a^3 \cdot a}{a \cdot \sqrt[3]{a}} = \log_6 \frac{a^3}{\sqrt[3]{a}} \stackrel{\text{racionalizamos}}{=} =$$

$$\log \frac{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \log \frac{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a} = \log (a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}) = \log \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \log \sqrt[3]{a^8}$$

$$3\log_6 a + 2\log_6 \sqrt{a} - 4\log_6 \sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6 \sqrt{a^2} - \log_6 \sqrt[3]{a^4} = \log_6 \frac{a^3 \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^4}} = \log_6 \frac{\sqrt[6]{a^{18}} \cdot \sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{a^8}} = \log_6 \sqrt[6]{a^{16}} =$$

$$= \log_6 \sqrt[3]{a^8}$$

$$\text{O bien: } 3\log_6 a + 2\log_6 \sqrt{a} - 4\log_6 \sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6 a^1 - \log_6 a^{\frac{4}{3}} = 3\log_6 a + \log_6 a - \frac{4}{3}\log_6 a = \left(3 + 1 - \frac{4}{3}\right) \cdot \log_6 a =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \log_6 a = \log_6 a^{\frac{8}{3}} = \log_6 \sqrt[3]{a^8}$$

25.- Simplifica al máximo:

$$\text{a) } 3\log_3 18^4 - \log_3 54^2 = \log_3 18^{12} - \log_3 54^2 = \log_3 (2 \cdot 3^2)^{12} - \log_3 (2 \cdot 3^3)^2 = \log \frac{2^{12} \cdot 3^{24}}{2^2 \cdot 3^6} = \log_3 (2^{10} \cdot 3^{18}) =$$

$$= \log_3 2^{10} + \log_3 3^{18} = 10\log_3 2 + 18\log_3 3 = 10\log_3 2 + 18$$

$$\text{b) } \log_8 a^4 - \log_8 8^a = 4\log_8 a - a\log_8 8 = 4\log_8 a - a$$

26.- Despeja el valor de A:

$\text{a) } \log A = 2 \cdot \log B - 1 - \frac{3 \cdot \log D}{5}$ $\log A = \log B^2 - \log 10 - \log D^{\frac{3}{5}}$ $\log A = \log B^2 - (\log 10 + \log \sqrt[5]{D^3})$ $\log A = \log B^2 - \log(10 \cdot \sqrt[5]{D^3})$ $\log A = \log \frac{B^2}{10 \cdot \sqrt[5]{D^3}}$ $A = \frac{B^2}{10 \cdot \sqrt[5]{D^3}}$	$\text{b) } \log A = -\frac{\log B}{3} + 2 - \log D$ $\log A = -\log B^{\frac{1}{3}} + \log 100 - \log D$ $\log A = \log 100 - (\log D + \log \sqrt[3]{B})$ $\log A = \log 100 - \log(D \sqrt[3]{B})$ $\log A = \log \frac{100}{D \sqrt[3]{B}}$ $A = \frac{100}{D \sqrt[3]{B}}$	$\text{c) } \log A = \log B - \frac{\log C}{3} - 3$ $\log A = \log B - \log C^{\frac{1}{3}} - \log 1000$ $\log A = \log B - (\log \sqrt[3]{C} + \log 1000)$ $\log A = \log B - \log(1000 \sqrt[3]{C})$ $\log A = \log \frac{B}{1000 \sqrt[3]{C}}$ $A = \frac{B}{1000 \sqrt[3]{C}}$
--	---	--

27.- Utilizando los logaritmos decimales de la calculadora y la expresión del cambio de base, calcula:

$$\text{a) } \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,630929753\dots$$

$$\text{b) } \log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = 1,682606194....$$

$$\text{c) } \log_3 512 = \frac{\log 512}{\log 3} = 5,678367782....$$

**28.-** Calcula los siguientes logaritmos utilizando la expresión del cambio de base y la calculadora; después, comprueba el resultado utilizando la definición de logaritmo.

$$\text{a) } \log_5 25 = \frac{\log 25}{\log 5} = 2 \quad \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} \quad 5^2 = 25$$

$$\text{b) } \log_4 64 = \frac{\log 64}{\log 4} = 3 \quad \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} \quad 4^3 = 64$$

$$\text{c) } \log_9 3 = \log_3 3 = \frac{\log 3}{\log 9} = 0,5 \quad \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} \quad 9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

### AMPLIACIÓN.

**29.-** Calcula:

**a)** El valor de la suma  $S(n) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^n$ , sabiendo que  $\log 2 = 0,301$ , y el valor que se obtiene cuando  $n = 50$ .

**b)** Determina ahora el valor de la suma  $S(n) = \log_a a + \log_a a^2 + \log_a a^3 + \dots + \log_a a^n$ .

$$\text{a) } S(50) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^{50} \rightarrow S(n) = \log 2^1 + \log 2^2 + \log 2^3 + \dots + \log 2^{50} \rightarrow$$

$$S(50) = \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \dots + 50\log 2 \rightarrow \text{Saco factor común } \log 2$$

$$S(50) = \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + 50)} \cdot \log 2 = 1275 \cdot 0,301 = 383,775$$

$$\begin{array}{c} \frac{(1+50) \cdot 50}{2} \\ \downarrow \\ 1275 \end{array} \rightarrow \text{Suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 1 y último 50.}$$

$$\text{b) } S(n) = \log_a a + \log_a a^2 + \log_a a^3 + \dots + \log_a a^n$$

$$S(50) = \log_a a + 2\log_a a + 3\log_a a + \dots + n\log_a a \rightarrow \text{Saco factor común } \log_a a$$

$$S(50) = \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)} \cdot \log_a a = \frac{n + n^2}{2} \cdot \underbrace{\log_a a}_{\text{es } 1} = \frac{n + n^2}{2}$$

$$\frac{(1+n) \cdot n}{2} \rightarrow \text{Suma de los } n \text{ primeros términos de una progresión aritmética de primer término 1 y último } n.$$

Si lo hacemos de forma que sea para cualquier valor de “n” sería:

**a)** Descomponemos los argumentos de cada logaritmo en forma de potencias, para bajar luego los exponentes:

$$S(n) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots + \log 2^n \rightarrow S(n) = \log 2^1 + \log 2^2 + \log 2^3 + \dots + \log 2^n \rightarrow$$

$$S(n) = \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \dots + n\log 2$$

Ahora saco factor común  $\log 2$ :

$$S(n) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \log 2$$

Siendo  $(1+2+3+\dots+n)$  una progresión aritmética de diferencia la unidad y  $n$  términos, con el último de ellos " $n$ ". La fórmula de la suma de  $n$  términos de una progresión venía dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \xrightarrow{\text{Haciendo } a_1=1} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n) \text{ sustituyendo en } S(n) \text{ queda:}$$

$$S(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot \log 2$$

Si  $n = 50$  (sustituyo  $n$  por  $50$ ), como me dice le enunciado, sale:

$$S(50) = \frac{1}{2}(50^2 + 50) \cdot \log 2 = \frac{2550}{2} \cdot \log 2 = 1275 \cdot 0,301 = 383,775$$

**b)** Siguiendo el mismo proceso obtendríamos:

$$S(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot \log_a a \xrightarrow{\text{Como } \log_a a=1} S(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

www.yoquieroaprobar.es