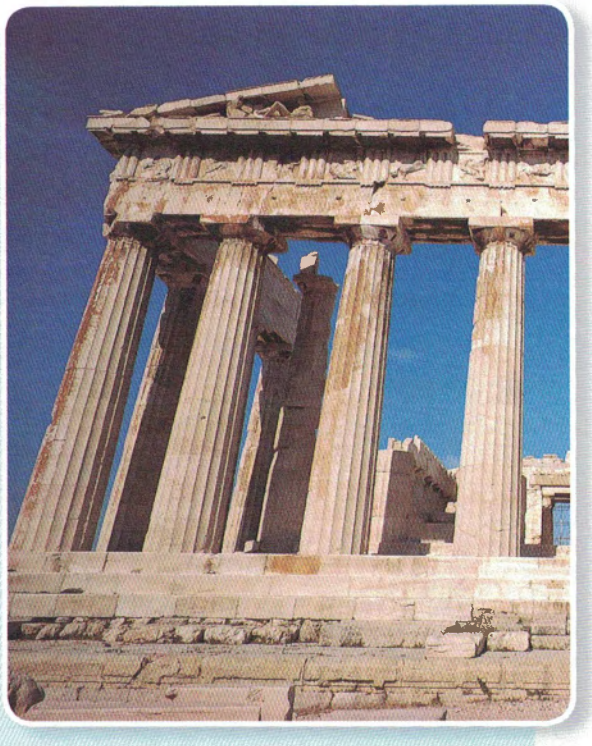
8 Proporcionalidad y porcentajes



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

EL NÚMERO DE ORO

A la hora de crear objetos o realizar obras de arte tiene una gran importancia la relación que exista entre las longitudes de sus dimensiones.

Hay pinturas, esculturas, edificios... que nos parecen bellos por sus formas. Entre las relaciones estéticas más utilizadas a lo largo de la historia, destaca la razón áurea o número de oro.

El número de oro se representa con la letra Φ y su valor es 1,618033... Decimos que las dimensiones de un rectángulo, *a* y b, están en proporción áurea cuando el cociente de *a* entre *b* es igual al número de oro:

$$\frac{a}{b} = \Phi = 1{,}618033...$$

Investiga

1. Dibuja varios rectángulos cuyos lados estén en proporción áurea.
2. Busca información sobre el número de oro. ¿Qué tipo de número decimal es?
3. ¿Podemos encontrar el número de oro en elementos de la naturaleza? Investiga sobre animales o plantas en los que aparezca el número de oro.

CÁLCULO MENTAL

Sumar tres números siendo la suma de dos de ellos una decena

57 + 24 + 3

57 + 24 + 3 = 60 + 24 = 84

Calcula mentalmente.

56 + 4 + 17 = 63 + 7 + 19 =

75 + 8 + 5 = 12 + 41 + 9 =

9 + 32 + 8 = 8 + 54 + 6 =

Sumar tres números siendo la suma de dos de ellos una centena

320 + 89 + 80

320 + 89 + 80 = 400 + 89 = 489

Calcula mentalmente.

180 + 9 + 20 = 340 + 17 + 60 =

70 + 5 + 430 = 250 + 50 + 39 =

8 + 410 + 90 = 780 + 37 + 20 =

1 Identificar razones y proporciones

- Una **razón** entre dos números, a y b, es el cociente $\frac{a}{b}$.
- Una **proporción** es la igualdad de dos razones. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son razones y se cumple que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se dice entonces que a, b, c y d forman una proporción.

  Los números a y d se llaman **extremos** y los números b y c son los **medios**.
- En una proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

1. Escribe la diferencia que hay entre una razón y una proporción.

2. Expresa mediante una razón.

a) En un jardín hay 5 pinos y 9 abetos. ¿Qué relación hay entre pinos y abetos?

b) La temperatura media del mes de junio fue de 24,5 °C y la de julio fue de 28,3 °C. ¿Qué relación hay entre ambas temperaturas medias?

c) En un *parking* hay 15 coches y 9 motos. ¿Qué relación hay entre coches y motos?

d) En un colegio hay 125 alumnos de Primaria y 180 de Secundaria. ¿Qué relación hay entre los alumnos de Primaria y Secundaria?

3. Averigua qué parejas de razones forman una proporción.

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$

b) $\frac{5}{2,5}$ y $\frac{10}{5}$

c) $\frac{5}{10}$ y $\frac{10}{16}$

d) $\frac{1,3}{2}$ y $\frac{2,5}{6}$

e) $\frac{3}{9}$ y $\frac{5}{15}$

f) $\frac{1,4}{0,5}$ y $\frac{4,2}{1,5}$

2 Calcular el término desconocido en una proporción

Para calcular el término desconocido en una proporción sigue estos pasos:

1.º Escribe la proporción e iguala el producto de los medios al producto de los extremos.

2.º Despeja la incógnita para obtener el valor del término que falta.

$$\frac{2,3}{x} = \frac{9,2}{8}$$

$$2,3 \cdot 8 = 9,2 \cdot x$$

$$18,4 = 9,2 \cdot x$$

$$x = \frac{18,4}{9,2} = 2$$

4. Calcula el término que falta en cada proporción.

a) $\frac{2}{7} = \frac{x}{14}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{18}{x}$

e) $\frac{x}{1,7} = \frac{4,8}{4}$

b) $\frac{6}{11} = \frac{66}{x}$

d) $\frac{7,5}{5} = \frac{10,5}{x}$

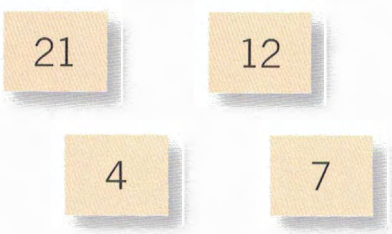
f) $\frac{x}{1,7} = \frac{4,8}{6,8}$

5. Calcula y completa los términos que faltan.

a) $\frac{2}{5} = \frac{\square}{15} = \frac{2,4}{\square}$

b) $\frac{10}{\square} = \frac{\square}{21} = \frac{2}{7} = \frac{1,2}{\square}$

6. Piensa y escribe dos proporciones usando los cuatro números dados.



3 Identificar magnitudes directamente proporcionales

- **Magnitud** es una propiedad o cualidad que se puede medir. Son magnitudes la altura, el peso, la longitud, la temperatura, etc.
- Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese número.
  La **constante de proporcionalidad** es el cociente de una cantidad y su correspondiente.

Las magnitudes kilos de naranjas y precio son directamente proporcionales.

N.º de kilos	2	3	4	5
Precio (€)	3	4,50	6	7,50

$$\frac{3}{2} = \frac{4{,}50}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7{,}50}{5} = 1{,}50 \leftarrow \text{Constante de proporcionalidad}$$

7. Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales y explica por qué.

a) El número de metros comprados de un tipo de tela y su precio.

b) La edad de una persona y su altura.

c) El número de albañiles de una obra y el tiempo que tardan en terminarla.

d) La superficie de un terreno y su precio.

8. Piensa y escribe tres ejemplos de magnitudes directamente proporcionales y otros tres que no lo sean.

Son directamente proporcionales

No son directamente proporcionales

9. Completa las tablas y después contesta.

a) Una botella contiene 1,5 ℓ de zumo. ¿Cuántos litros contienen 6 botellas?

N.º de botellas	1	2	3	4	5	6
Litros de zumo						

¿Las magnitudes número de botellas y litros de zumo son directamente proporcionales? ¿Por qué?

b) En un restaurante, 2 menús del día cuestan 12 €. Hoy han tomado menú 8 personas. ¿Cuánto se ha recaudado?

N.º de menús	2	3					
Precio en €							

¿Las magnitudes número de menús y precio son directamente proporcionales? ¿Por qué?

10. Completa las tablas sabiendo que las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales.

A	1	2	4	6	8
B		9			

A	3	5	7	9	10
B	0,54				

A	2	3	4	8	10
B			9		

A	4	5	7	8	10
B				24	

4 Resolver problemas de proporcionalidad directa (regla de tres)

La **regla de tres simple directa** nos permite calcular una cantidad desconocida que está en proporción directa con otras tres cantidades conocidas.

Gustavo ha pagado 10,50 € por hacer 70 fotocopias. ¿Cuánto pagará si hace 40 fotocopias?

Como el precio y el número de fotocopias son directamente proporcionales se cumple que:

N.º de fotocopias
Precio (€)

$$\frac{70}{10{,}50} = \frac{40}{x} \rightarrow 70 \cdot x = 10{,}50 \cdot 40 \rightarrow x = \frac{10{,}50 \cdot 40}{70} = \frac{420}{70} = 6$$

Si hace 40 fotocopias, pagará 6 €.

11. Una máquina llena 70 botellas iguales en 35 minutos.

a) ¿Cuántos minutos tardará en llenar 120 botellas?

b) ¿Cuántas botellas llenará en 1 hora y 10 minutos?

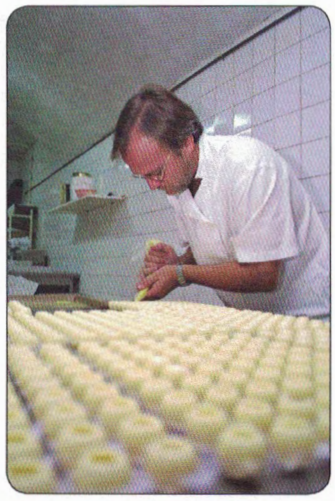
c) Si la máquina está funcionando cada día 7 horas y 35 minutos, ¿cuántas botellas llenará cada día?

d) Si un día se necesita llenar 1 750 botellas, ¿cuántos minutos deberá funcionar la máquina?

e) Deben preparar un pedido de 1 000 botellas y la máquina lleva funcionando 5 horas. ¿Faltan o sobran botellas? ¿Cuántos minutos faltan o han sobrado?

12. Un pastelero utiliza 3 kg de manzanas y 6 litros de leche para hacer 18 tartas iguales.

a) ¿Cuántos kilos de manzanas necesita para hacer 24 tartas?



b) ¿Cuántos litros de leche necesita para hacer 9 tartas?

c) ¿Para cuántas tartas tendría leche suficiente si tiene 27 litros?

13. Para hacer 12 disfraces iguales, María utiliza 60 m de cinta roja y 18 m de cinta azul.

a) ¿Cuántos metros de cinta roja necesita para hacer 9 disfraces?

b) ¿Cuántos metros de cinta azul necesita para hacer 16 disfraces?

c) ¿Para cuántos disfraces tendría suficiente cinta roja si tiene 10 m?

d) ¿Para cuántos disfraces tendría suficiente cinta azul si tiene 30 m?

e) Si tiene 90 m de cada tipo de cinta, ¿cuántos disfraces completos podrá hacer? ¿Cuántos metros de cinta de cada tipo le sobrarán?

5 Calcular porcentajes

- El **tanto por ciento** o **porcentaje** de un número significa que si dividimos el número en 100 partes iguales tomamos las partes que indica el tanto por ciento.
- Para **calcular el tanto por ciento** de un número, se multiplica el número por el tanto por ciento y el resultado se divide entre 100.

$$12\,\%\text{ de }300 = \frac{12 \cdot 300}{100} = 0{,}12 \cdot 300 = 36$$

14. Escribe un porcentaje asociado a cada situación.

a) 15 de cada 100 alumnos practican algún deporte.

b) A 24 de cada 100 personas les gusta el teatro.

c) 8 de cada 50 personas tienen bicicleta.

d) 12 de cada 75 personas tienen una mascota.

15. Calcula.

a) 5 % de 200

b) 7 % de 4 800

c) 3 % de 400

d) 9 % de 5 200

e) 12 % de 700

f) 34 % de 6 300

g) 25 % de 900

h) 42 % de 8 100

16. Comprueba si es o no cierto y justifica tu respuesta.

a) Calcular el 3 % de 420 es lo mismo que multiplicar 420 por 0,3.

b) Calcular el 15 % de 2 790 es lo mismo que multiplicar 2 790 por 0,15.

c) Calcular el 3,2 % de 1 500 es lo mismo que multiplicar 1 500 por 0,32.

17. Piensa y coloca el signo adecuado sin calcular. Después, calcula y comprueba tus respuestas.

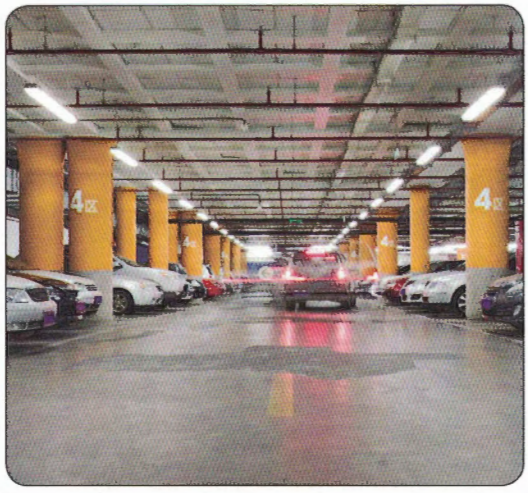
a) 30 % de 40 ◯ 30 % de 29

c) 15 % de 40 ◯ 17 % de 40

b) 40 % de 5 ◯ 5 % de 40

d) 35 % de 60 ◯ 20 % de 50

18. En un *parking* hay 300 coches. El 9 % tienen plaza fija. ¿Cuántos coches tienen plaza fija?



19. En una panadería hay 420 barras. El 25 % son de pan integral. ¿Cuántas barras de pan integral hay?

20. En un pueblo viven 1 500 personas. El 18 % se dedican a la agricultura. ¿Cuántas personas se dedican a la agricultura?

21. En un almacén hay 2 100 bidones. El 32 % son de aceite. ¿Cuántos bidones con aceite hay en el almacén?

6 Resolver problemas de porcentajes

22. El precio de un artículo es de 90 €. ¿Por cuánto habrá que venderlo si se quiere ganar un 10 % de su precio?

23. El precio de un artículo era de 90 €. Se rebajó 18 €. ¿Qué porcentaje de rebaja se hizo?

24. En un parque hay 120 árboles. Un quinto de los árboles son pinos y el resto álamos. ¿Cuántos álamos hay en el parque? ¿Qué porcentaje del total son?

25. En un colegio hay 800 alumnos. El 54 % son de Primaria y el resto de Secundaria. ¿Cuántos alumnos de Secundaria hay en el colegio? ¿Qué porcentaje son?

26. En una empresa trabajan 900 mujeres. Son el 60 % del número total de trabajadores. ¿Cuántas personas trabajan en la empresa?

27. El 30 % de los asistentes a una obra de teatro son niños. Hay 12 niños en el público. ¿Cuántas personas hay en el público?

28. Luisa ha vendido uno de estos tres artículos por 418 €. ¿Cuál es el precio del artículo si lo ha vendido un 10 % más caro?

29. Luisa ha vendido la cámara de fotos por 216 €. ¿Qué porcentaje de descuento ha hecho?

30. Se ha hecho una encuesta a 4 000 personas acerca de sus deportes preferidos. El 10 % prefieren tenis; el 32 %, baloncesto; el 43 %, fútbol, y el resto, voleibol. ¿Cuántas personas prefieren voleibol?

31. En una biblioteca hay 2 000 libros. El 18 % son de aventuras, 680 son de poesía y el resto son diccionarios.

a) ¿Cuántos diccionarios hay en la biblioteca?

b) ¿Qué porcentaje de los libros son de poesía? ¿Qué porcentaje son diccionarios?

32. Para un partido de fútbol se han puesto a la venta 50 000 entradas. La semana pasada se vendieron el 35 % y esta semana se han vendido 1 500. ¿Cuántas entradas no se han vendido? ¿Qué porcentaje son?

REPASA LO APRENDIDO

1 Calcula.

a) 2,78 + 23,9 + 8,654

b) 34,9 − 8,675

c) 0,54 · 0,56

d) 12 : 3,7

e) 34,87 : 2,5

f) 93,2 : 2,75

2 Opera teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.

a) 3,56 + 11,2 − 9,5 − 0,26

b) 2 · (3,7 + 2,8) − 4,75

c) 3,6 + 2,8 · 3 − 4,78

d) (3,5 + 7,2 + 5,3) : 10

3 Expresa cada medida en la unidad que se indica.

En m

a) 0,4 km

b) 1,75 km

c) 1,3 hm

d) 12,5 dam

e) 7 dam y 5 dm

f) 9 dm y 78 cm

En m^2

a) 2,1 hm^2

b) 0,05 km^2

c) 0,6 dam^2

d) 3,2 dm^2

e) 3 ha y 9 a

f) 145 dm^2 y 8000 cm^2

En m^3

a) 0,4 hm^3

b) 0,03 dam^3

c) 1,75 dm^3

d) 8700 cm^3

e) 500 dm^3 y 9000 cm^3

f) 4200 cm^3 y 15000 mm^3