

## CURSO COMPLETO

1° Halla a y b para que el polinomio  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$  sea divisible por  $(x^2 + x + 1)$ . Obtén las raíces y la descomposición de  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 8x$

2° Resuelve:

a)  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-4}$

b)  $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

3° Calcula  $\sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \cdot i$ .

4° Estudia los puntos notables, la monotonía y la curvatura de  $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

5° Calcula la 1ª derivada de  $f(x) = (\operatorname{sen}x)^{\operatorname{arctg}x}$ .

6° Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea de  $8 \text{ dm}^3$ . Averigua las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.

7° Calcula los límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

8° Las diagonales de un paralelogramo miden 22 y 16 cm y forman un ángulo de  $60^\circ$ . Halla los lados del paralelogramo y el área del mismo.

9° Estudia la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro m. Halla la distancia entre las rectas según los valores de m. Siendo  $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3}$  y

$s: 6x - my + 1 = 0$ .

10° Halla el punto simétrico de  $P=(3, 2)$  respecto de la recta  $r: \begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 2 - 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

1º ¿a, b?

la condición para que un polinomio divida a otro es que el resto de la división sea cero. Realizemos la división "normal" pues el divisor es de grado 2.

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 + bx + 5 \\ -x^3 - x^2 - x \\ \hline (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 \\ -(a-1)x^2 - (a-1)x - a + 1 \\ \hline (b-1-a+1)x + 5 - a + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} |x^2+x+1 \\ x+a-1 \end{array}$$

El resto es  $R(x) = (b-a)x + 5-a$

la condición para que un polinomio sea nulo para cualquier valor de  $x$  es que sus coeficientes sean nulos.

$$R(x) = \text{polinomio nulo} \rightarrow \begin{cases} b-a=0 \\ 5-a=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=b=5}$$

Descomposición de  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 8x$

$$P(x) = x \cdot (x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x - 8)$$

$$-8: \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

$$\checkmark 1? P(1) = 1 + 2 - 7 + 2 - 8 \neq 0$$

$$\checkmark -1? P(-1) = 1 - 2 - 7 - 2 - 8 \neq 0$$

$$\checkmark 2? P(2) = 16 + 16 - 28 + 4 - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\checkmark -2? P(-2) = -8 + 16 - 2 + 4 \neq 0$$

$$\checkmark -4? P(-4) = -64 + 64 - 4 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & 2 & -8 \\ 2 & & 2 & 8 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & & -4 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

la solución será:

$$P(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x+4) \cdot (x^2+1).$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } (\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow$$

$$3x+1 = x-4 + 2\sqrt{(x-4)(x+1)} + x+1 \Leftrightarrow$$

$$(x+4)^2 = (2\sqrt{(x-4)(x+1)})^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x + 16 = 4(x-4)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x + 16 = 4x^2 + 4x - 16x - 16 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{3x^2 - 20x - 32 = 0} \rightarrow$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-32)}}{2 \cdot 3} = \frac{20 \pm 28}{6} = \begin{cases} \frac{20+28}{6} = 8 \\ \frac{20-28}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Comprobación:

$$x=8: \sqrt{25} - \sqrt{9} = \sqrt{4} \quad \text{válida}$$

$$x=-\frac{4}{3}: \sqrt{-3} - \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{-\frac{16}{3}} \quad \text{no válida}$$

Solución  $\boxed{x=8}$

$$\text{b) } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Recuerda  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Recuerda  $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2\pi k$  y  $\alpha = \pi - \beta + 2\pi k$ .  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$(1) \quad x + \frac{\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$(2) \quad x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2x + \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

$$(1) 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k}$$

$$(2) \boxed{x = -\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}i} = z \Leftrightarrow z^3 = 1 - \sqrt{3}i$$

Hay que expresar  $1 - \sqrt{3}i$  en forma polar.

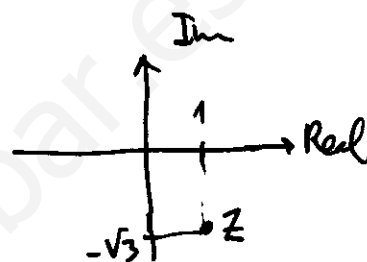
$$\text{módulo: } r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \rightarrow r = 2.$$

$$\text{argumento: } \tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = -60^\circ \text{ ó } -60^\circ + 180^\circ$$

como  $z$  está en el 4º cuadrante.  $\alpha = -60^\circ = 300^\circ$ .

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{z^3 = 2_{300^\circ}}$$



expresamos  $z$  en forma polar  $z = r_\alpha \rightarrow$

$$(r_\alpha)^3 = 2_{300^\circ} \Leftrightarrow r_{3\alpha} = 2_{300^\circ}$$

$$\text{igualdad de módulos: } r^3 = 2 \rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{2}}$$

$$\text{igualdad de argumentos: } 3\alpha = 300^\circ + 360k \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow (*)$$

$$\alpha_0 = 100^\circ \rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2}_{100^\circ}$$

$$\alpha_1 = 220^\circ \rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}_{220^\circ}$$

$$\alpha_2 = 340^\circ \rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}_{340^\circ}$$

(A) Recuerda  $3\alpha = 300^\circ + 360k \Leftrightarrow \alpha = 100^\circ + 120k$ , para  $k=3$  se obtiene  $\alpha_0 = \alpha_3$  y así sucesivamente.

④ 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x-1) - 2x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x-4) \cdot (x-1)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4) \cdot (x-1) - (2x^2-4x) \cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 4x^2 + 8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Resumiendo

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} \quad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

• Extremos.

Condición de extremo  $f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow 2x \cdot (x-2) = 0 \rightarrow$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(0) = \frac{4}{(-1)^3} < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

$$f''(2) = \frac{4}{1^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

$M = (0, f(0)) = (0, 0)$
$m = (2, f(2)) = (2, 8)$

• Puntos de inflexión

Condición de punto de inflexión  $f''(x) = 0 \rightarrow 4 = 0 \rightarrow$  no hay.

• Monotonía.

Se estudia el signo de la 1ª derivada. Tabla con los valores que cambian a  $f'(x)^{(*)}$  y los puntos de discontinuidad de  $f$  y  $f'$  (en este caso sólo es  $x=1$ )

(\*) a  $f'$  le cambian  $x=0$  y  $x=2$ .

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f$	$\nearrow$	Max	$\rightarrow$	$\nexists$	$\rightarrow$	Min	$\nearrow$

~~$\nexists$~~  no existe  
 $\exists$  existe.

$$-3 \in (-\infty, 0) : f'(-3) = \frac{18+12}{+} > 0$$

$$1/2 \in (0, 1) : f'(1/2) = \frac{1/2-2}{+} < 0$$

$$3/2 \in (1, 2) : f'(3/2) = \frac{45-6}{+} < 0$$

$$3 \in (2, \infty) : f'(3) = \frac{18-12}{+} > 0$$

• Curvatura.

Se estudia el signo de la 2ª derivada. Tabla con los valores que cambian a  $f''(x)$  (no tiene) y de discontinuidad de  $f$  y  $f''(x=1)$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''$	-	$\nexists$	+
$f$	$\wedge$ cóncava	$\nexists$	$\cup$ convexa

$$0 \in (-\infty, 1) : f''(0) = \frac{4}{-1} < 0$$

$$3 \in (1, \infty) : f''(3) = \frac{4}{2^3} > 0$$

⑤ Al tratarse de una función exponencial deberemos aplicar el método de la derivación logarítmica

$$y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$\Rightarrow$

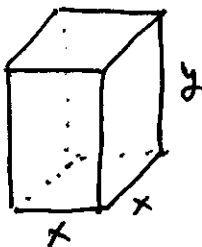
$$\ln y = \ln (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow$$

$$\ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \quad \rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot (\cos x) \quad \rightarrow$$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \cdot \left[ \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \right]$$

6º Observa la figura



• variables  $x = \text{ancho} = \text{largo}$   $y = \text{alto}$  ( $x, y > 0$ )

• ligadura o restricción: el volumen es  $8 \text{ dm}^3$

$$x^2 y = 8$$

• Función a optimizar: superficie exterior. (recuerda el desarrollo)

$$f = 2x^2 + 4xy$$

• Se introduce la ligadura: es más sencillo despejar la  $y$

$$y = \frac{8}{x^2} \rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x \frac{8}{x^2} = 2x^2 + \frac{32}{x} \quad (*)$$

•  $f$  y  $2^{\text{a}}$  derivadas

$$f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} \quad f''(x) = 4 + \frac{64}{x^3}$$

$$\text{Condición de extremo } f' = 0 \rightarrow 4x - \frac{32}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$f''(2) > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

(\*) Es MUY IMPORTANTE efectuar las operaciones correctamente.

Solución:

$$x = 2 \rightarrow y = \frac{8}{2^2} = 2$$

la caja tiene forma de cubo de arista 2 dm.

$$\text{Superficie mínima } f(2) = 2 \cdot 2^2 + \frac{32}{2} = 24 \text{ dm}^2$$

$$\textcircled{7}^{\circ} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \frac{(-2)^4 - 16}{(-8) + 8} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Hay que simplificar la fracción:  $-2$  es una raíz del numerador y denominador. Observa que el numerador se puede descomponer de modo sencillo mediante las identidades notables

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \quad a^4 - b^4 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$$

$$\text{Num) } x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

$$\text{Den) } \begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & +4 & \underline{0} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x-2)}{x^2 - 2x + 4} = \frac{8 \cdot -4}{4 + 4 + 4} = \boxed{-1}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+3)} - n = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n+3)} - n) \cdot (\sqrt{n(n+3)} + n)}{\sqrt{n(n+3)} + n} =$$

Se multiplica y divide por el conjugado.

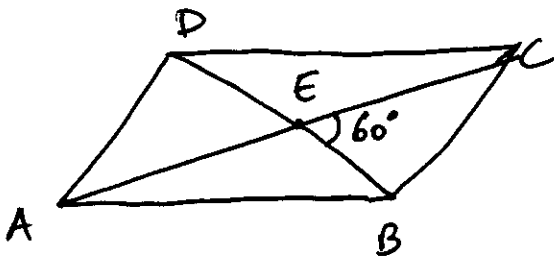
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+3) - n^2}{\sqrt{n(n+3)} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} + 3n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$



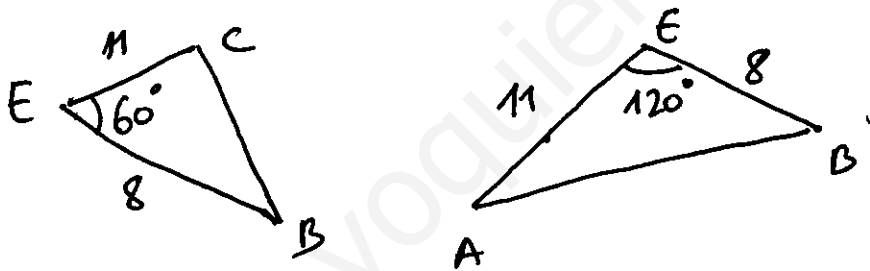
Se divide por la mayor potencia del denominador :  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

8. Observa el dibujo.



Recuerda: las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Del paralelogramo se obtienen 2 triángulos



$$EC = EA \text{ y } EB = ED.$$

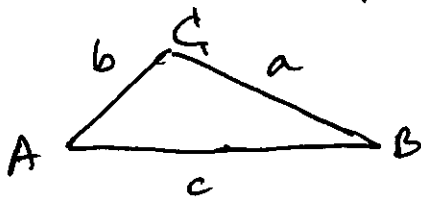
$\hat{E}$  en  $\widehat{ECB}$  y  $\hat{E}$  en  $\widehat{EAB}$  son suplementarios.

Aplicando el teorema del coseno a cada triángulo podemos averiguar el valor de los lados  $AB = DC$  y  $BC = AD$  respectivamente

$$\hat{?} BC? \quad BC^2 = 11^2 + 8^2 - 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 97 \rightarrow BC = \sqrt{97} \text{ cm}$$

$$\hat{?} AB? \quad AB^2 = 11^2 + 8^2 - 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 273 \rightarrow AB = \sqrt{273} \text{ cm}$$

Recuerda cómo se puede hallar el área de un triángulo



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

En el paralelogramo  $\widehat{ADE} = \widehat{EBC}$  y  $\widehat{ABE} = \widehat{DFC}$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 11 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ + 11 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 88\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

$$\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$$

9.º Posición relativa.

1.º se expresan ambas rectas en forma general

$$r: 3x + 3 = 2y - 4 \rightarrow r: 3x - 2y + 7 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 2y + 7 = 0 \\ s: 6x - my + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} = \frac{7}{1} \end{array} \right. ?$$

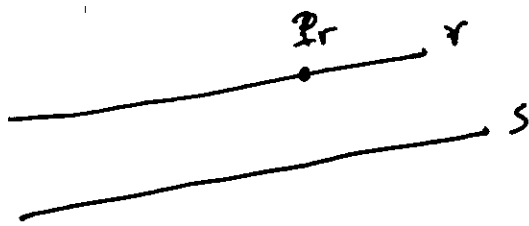
$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} \Leftrightarrow 3m = 12 \rightarrow m = 4$$

$$\text{si } m = 4 \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{1} \quad \text{Paralelas.}$$

$$\text{si } m \neq 4 \rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{-2}{-m} \quad \text{Secantes.}$$

Distancias

$$\text{si } m = 4 \rightarrow \text{dis}(r, s) = \text{dis}(r, P_s) = \text{dis}(s, P_r)$$



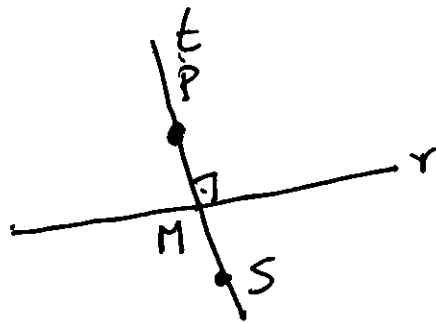
Vamos a emplear la última condición pues ya tenemos un punto de  $r$  (recuerda que  $r$  nos la han proporcionado en forma continua)

$$s: 6x - 4y + 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{dis}(s, P_r) = \frac{|6 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{\sqrt{52}} \\ P_r = (-1, 2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{dis}(r, s) = \text{dis}(s, P_r) = \frac{13}{\sqrt{52}} \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}} = \frac{13\sqrt{52}}{52} = \frac{\sqrt{52}}{4} = \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2} u}$$

si  $m \neq 4$   $\text{dis}(r, s) = 0$  pero son secantes.

10° obren las figuras  
•  $P$



¿t?  $t \perp r$  y pasa por  $P$ .

$$\vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t = (3, 5) \rightarrow t: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{5}$$

¿M? es la intersección de  $r$  y  $t$ . Para resolver bien el sistema se expresan ambas rectas en forma general.

$$r: \begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 2 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow -3x - 9 = 5y - 10 \Rightarrow -3x - 5y = -1$$

$$\boxed{3x + 5y = 1}$$

$$t_1 \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{5} \Leftrightarrow 5x-15 = 3y-6 \Leftrightarrow 5x-3y = 9$$

sistema

$$\begin{cases} 3x+5y = 1 \\ 5x-3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+15y = 3 \\ 25x-15y = 45 \end{cases}$$
$$\frac{34x}{34x} = 48 \rightarrow x = \frac{48}{34} = \frac{24}{17}$$

$$\begin{cases} -15x-25y = -5 \\ 15x-9y = -27 \end{cases}$$
$$\frac{-34y}{-34y} = -32 \rightarrow y = \frac{32}{34} = \frac{16}{17}$$

$$M = \left( \frac{24}{17}, \frac{16}{17} \right)$$

¿S? M es el punto medio de P y su simétrico: S.

$$M = \frac{P+S}{2} \rightarrow S = 2M - P$$

$$S = 2 \cdot \left( \frac{24}{17}, \frac{16}{17} \right) - (3, 2) \Rightarrow$$

$$S = \left( \frac{-3}{17}, \frac{-2}{17} \right)$$