REPASO NÚMEROS COMPLEJOS

1. Realizar las siguientes operaciones con números complejos en forma binómica y representa gráficamente el resultado.

a) (3 + 2i) + (–5 – 4i) b) (3 – 4i) · (–1 + 2i) c) $\frac{3-5i}{2+2i}$

2.1. Pasar a forma polar los siguientes complejos.

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{4}i$ b) 3i c) -8

2.2. Pasar a forma binómica:

a) 2_{45^o} b)$3_{(\pi/6)}$ c) $\left(\sqrt{2}\right)_{180^o}$

3. 1. Realizar las siguientes operaciones con complejos en forma polar.

a) $12_{60^o}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{4}}$ b) $\left(12_{\pi}\right):\left(3_{\frac{\pi}{6}}\right)$ c) $\left(5_{\frac{\pi}{4}}\right)^3$

3.2. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

$$\frac{\left(-2\sqrt{3}-2i\right)\cdot\left(\cos 150^o + t\ \text{sen}\ 150^o\right)}{(1+i)^3\cdot i^{17}}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 6x + 25 = 0$ b) $x^2 - 12x + 100 = 0$ c) $x^4 + 16 = 0$

5. Calcular el valor de "a" para que el complejo $\frac{6-2i}{1+ai}$ sea imaginario puro

6. Calcula el valor de a para que el número $\frac{4+2ai}{1+i}$:

a) Sea un número real.

b) El afijo de su conjugado esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

7. Calcular el valor de "m" y "n" para que se verifique la siguiente igualdad:

$$5\cdot(m - 2i) = (3 + ni)\cdot(n - i)$$

8. Hallar dos números complejos tales que su producto sea -18 y su cociente 2i.

9. Verdadero o falso, razona tu respuesta:

a) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}\quad \forall\ z,w\in\mathbb{C}$

b) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\quad \forall\ z,w\in\mathbb{C}$

10. Dibujar un pentágono regular calculando las raíces quintas de 4 – 4i

Ejercicio 1: Realizar las siguientes operaciones con números complejos en forma binómica, indicando el afijo del número resultante.

a) (3 + 2i) + (–5 – 4i) = -2 – 2i $\rightarrow$ Afijo:A(-2,-2)

b) (3 – 4i) · (–1 + 2i) = -3 + 6i + 4i + 8 = 5 + 10i $\rightarrow$ Afijo: B(5,10)

c) $\dfrac{3-5i}{2+2i} = \dfrac{(3-5i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \dfrac{6-6i-10i-10}{8} = \dfrac{-4-16i}{8} = -\dfrac{1}{2}-2i$ $\rightarrow$ Afijo: C$\left(-\dfrac{1}{2},-2\right)$

Ejercicio 2:

2.1. Pasar a forma polar los siguientes nº complejos.

a) z = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{9}{4}i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\dfrac{3+81}{16}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2} \\ \alpha = \text{arctg}\left(3\sqrt{3}\right) = 79{,}10^\circ \end{cases}$

Por tanto: z = $\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)_{79{,}1^\circ}$

b) 3i = 3_{90°

c) -8 = 8_{180°

2.2. Pasar a forma binómica los siguientes nº complejos:

a) 2_{45° = 2(cos 45º + i sen45º) = $2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

b)$3_{(\pi/6)}$ = 3(cos 30º + i sen30º) = $3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$

c) $\left(\sqrt{2}\right)_{180^\circ} = -\sqrt{2}$

Ejercicio 3:

3.1. Realizar las siguientes operaciones con nº complejos en forma polar.

a) $12_{60^\circ}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{4}} = 3_{105^\circ}$ b) $(12_{\pi}) : \left(3_{\frac{\pi}{6}}\right) = 4_{150^\circ}$ c) $\left(5_{\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 125_{135^\circ}$

3.2. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

$$\frac{\left(-2\sqrt{3}-2i\right)\cdot\left(\cos 150^\circ + i\,\text{sen}\,150^\circ\right)}{(1+i)^3\cdot i^{17}}$$

$$\frac{\left(-2\sqrt{3}-2i\right)\cdot\left(\cos 150^\circ + i\,\text{sen}\,150^\circ\right)}{(1+i)^3\cdot i^{17}} = \frac{4_{210^\circ}\cdot 1_{150^\circ}}{\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3\cdot i} = \frac{4_{360^\circ}}{\left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ}\cdot 1_{90^\circ}} = \sqrt{2}_{135^\circ} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$$

Ejercicio 4: Resolver las siguientes ecuaciones, expresando las soluciones en forma binómica:

a) $z^2 - 6z + 25 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

b) $x^2 - 12x + 100 = 0$

$$z = \frac{12 \pm \sqrt{-256}}{2} = \frac{12 \pm 16i}{2} = 6 \pm 8i$$

c) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-16}$

$$z = -16 = 16_{180^o} \Rightarrow \sqrt[4]{16_{180^o}} = 2_{45^o + 90^o k},\ k = 0,1,2,3$$

$$z_1 = 2_{45^o} = 2(\cos 45^o + i\,\mathrm{sen} 45^o) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$z_2 = 2_{135^o} = 2(\cos 135^o + i\,\mathrm{sen} 135^o) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$z_3 = 2_{225^o} = 2(\cos 225^o + i\,\mathrm{sen} 225^o) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$z_4 = 2_{315^o} = 2(\cos 315^o + i\,\mathrm{sen} 315^o) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

Ejercicio 5: Calcular el valor de "a" para que el complejo $z = \frac{6-2i}{1+ai}$ sea imaginario puro

$$z = \frac{6-2i}{1+ai} = \frac{(6-2i)(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)} = \frac{6-6ai-2i-2a}{1+a^2} = \frac{6-2a}{1+a^2} + \frac{-6a-2}{1+a^2}i$$

El número z es imaginario puro si su parte real es cero $\rightarrow 6 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

Ejercicio 6. Calcula el valor de a para que el número $\frac{4+2ai}{1+i}$:

a) Sea un número real.

b) El afijo de su conjugado esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$$\frac{4+2ai}{1+i} = \frac{(4+2ai)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(4+2a)+(2a-4)i}{2} = (2+a)+(a-2)i$$

a) Es número real si $a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

b) Conjugado: $(2 + a) + (2 - a)i \rightarrow$ Su afijo $(2 + a, 2 - a)$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante si se verifica:

$$2 + a = 2 - a \rightarrow a = 0$$

Ejercicio 7. Calcular el valor de “m” y “n” para que se verifique la siguiente igualdad:

$$5\cdot(m-2i) = (3+ni)\cdot(n-i)$$

$$5m-10i = 3n-3i+n^2i+n \rightarrow 5m-10i = 4n+(n^2-3)i \rightarrow \begin{cases} 5m = 4n \rightarrow m = \pm\dfrac{4\sqrt{7}}{5}i \\ -10 = n^2-3 \rightarrow n = \pm\sqrt{7}i \end{cases}$$

Ejercicio 8. Hallar dos números complejos tales que su producto sea -18 y su cociente 2i.

Sea z = r_α y w = s_β

$$\left.\begin{array}{l} r_\alpha \cdot s_\beta = -18 \rightarrow (r\cdot s)_{\alpha+\beta} = 18_{180^\circ} \rightarrow \begin{cases} r\cdot s = 18 \\ \alpha+\beta = 180^\circ \end{cases} \\ \dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = 2i \rightarrow \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = 2_{90^\circ} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{r}{s} = 2 \\ \alpha-\beta = 90^\circ \end{cases} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha+\beta = 180^\circ \\ \alpha-\beta = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \alpha = 135^\circ, \beta = 45^\circ \\ \begin{cases} r\cdot s = 18 \\ \dfrac{r}{s} = 2 \end{cases} \rightarrow s = 3, r = 6 \end{array}\right.$$

Los números son 6_{135° y 3_{45°

Ejercicio 9. Verdadero o falso, razona tu respuesta:

a) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w} \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C}$

b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w} \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C}$

a) Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos.

Calculamos el conjugado del producto:

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i \rightarrow \overline{z_1\cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)i$

Hallamos el producto de sus conjugados:

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = ac - bd + (-ad - bc)i = ac - bd - (ad + bc)i$

Luego es cierto.

b) $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$\overline{z_1}+\overline{z_2} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$

Ejercicio 10. Dibujar un pentágono regular calculando las raíces quintas de 4 – 4i

Sea z = 4 – 4i $\rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \\ \boldsymbol{\alpha} = \operatorname{arctg}(-1) = 315^\circ \end{cases}$

Sea $w_k = \sqrt[5]{\left(\sqrt{32}\right)_{315^\circ}} = \left(\sqrt{2}\right)_{63^\circ+72^\circ k}$, k = 0,1,2,3,4

Las raíces son:

$W_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{63^\circ}$ $W_2 = \left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}$ $W_3 = \left(\sqrt{2}\right)_{207^\circ}$ $W_4 = \left(\sqrt{2}\right)_{279^\circ}$ $W_5 = \left(\sqrt{2}\right)_{351^\circ}$