Números complejos

Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos

1. Clasificar los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) (3i); b) 1/3-5/2 i; c) 6/5; d)-3i; e) 5i; f) 0; g) i; h) (1/3)-i.

2. Escribir tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.

3. Representar gráficamente los números complejos:
a) (3+4i); b) -4; c) -2i; d) (-2+3i); e) (1+3i); f) (6-i); g) -2; h) 3i; g) (-1+i).

4. Representar gráficamente el opuesto y el conjugado de:
a) -3+5i; b) 3-2i; c) 1-2i; d) -2+i; e) 6; f) 5i; g) 3; h) -4i.

5. Indicar cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos:
a) -9; b) -3i; c) -3i+1; d) $\sqrt{3}$ +(1/2)i; e) (1/3)i; f) $\sqrt{2}$; g) -2i; h) (1+3i). Sol: R, I, C, C, I, R, I, C

6. Representar gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: z+ $\bar{z}$ =2. Sol: recta x=1

7. Representar gráficamente los números complejos z tales que z- $\bar{z}$ =2. ¿Qué debe verificar z?. Sol: es imposible

8. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de a) -2-i; b) 1+i; c) 3i.

9. Escribir en forma trigonométrica y polar los complejos: a) 4+3i; b) -1+i; c) 5-12i.
Sol: a) $5_{36,87º}$; b) $\sqrt{2}_{135º}$; c) $13_{292,6º}$

10. Escribir en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3_{\pi/3}$; b) $3_{135º}$; c) $1_{270º}$.
Sol: a) 3(cos60º+isen60º)=3/2+3 $\sqrt{3}$ /2 i; b) 3(cos135º+isen135º)=-3 $\sqrt{2}$ /2 +3 $\sqrt{2}$ /2 i; c) cos270º+isen270º=-i

11. Calcular tres argumentos del número complejo 1-i. Sol: a) 315º, 675º; 1035º

12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera r_α.? Sol: $r_{360-\alpha}$.

13. Expresar en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: $6_{30º}$.
Sol: a) $6_{330º}$, (3 $\sqrt{3}$ -3i); b) $6_{210º}$, (-3 $\sqrt{3}$ -3i)

14. Escribir en forma polar los números complejos: a) 6-8i; b) 2 + $\sqrt{14}$ i; c) -3+4i. Sol: a) $10_{306,9º}$; b) $4_{69,3º}$; c) $5_{126,9º}$

15. Escribir en forma binómica el complejo R=2(cos45º+isen45º). Representarlo gráficamente. Sol: a) $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ i

16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600º. Escribir el número en forma trígono-métrica. Sol: 5(cos240º+isen240º)

17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?: 4(3-2i)+5(-2+i). Sol: 303,7º

18. Averiguar cómo debe ser un complejo r_α para que sea:

a) un número real, Sol: $\alpha=0+k\pi$

b) un número imaginario puro. Sol: $\alpha=\pi/2+k\pi$

19. .Escribir en forma polar: a) $1+\sqrt{3}\,i$; b) $-1+\sqrt{3}\,i$; c) $1-\sqrt{3}\,i$; d) $-1-\sqrt{3}\,i$; e) $3\sqrt{3}+3i$; f) $-3\sqrt{3}-3i$.

Sol: a) 2_{60°; b) 2_{120°; c) 2_{300°; d) 2_{240°; e) $\sqrt{6}_{\ 30^\circ}$, f) $\sqrt{6}_{\ 210^\circ}$

20. Escribir en forma binómica:a) 2_{60°; b) $1_{(3\pi/2)}$; c) 5_{450°; d) 2_{180°; e) 4_{750°; f) $6_{(\pi/3)}$.

Sol: a) $(1+\sqrt{3}\,i)$; b) $-i$; c) $5i$; d) -2; e) $(2\sqrt{3}+2i)$; f) $(3+3\sqrt{3}\,i)$

21. Escribir todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1,2) y radio 5.

Sol: $(5\cos\alpha+1,(5\operatorname{sen}\alpha+2)i)$

22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos:

a) $\sqrt{3}+3i$ Sol: a) $\sqrt{12}_{\ 60^\circ}$, $\sqrt{12}\,(\cos 60^\circ+i\operatorname{sen}60^\circ)$

b) $1-i$ Sol: $\sqrt{2}_{\ 225^\circ}$, $\sqrt{2}\,(\cos 225^\circ+i\operatorname{sen}225^\circ)$

c) $2-2i$. Sol: $2\sqrt{2}_{\ 315^\circ}$, $2\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ+i\operatorname{sen}315^\circ)$

23. Escribir en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a) $6_{\pi/3}$, b) 2_{45°, c) 2_{300°.

Sol: a) $6(\cos 60+i\operatorname{sen}60)=(3{,}3\sqrt{3}\,i)$; b) $2(\cos 45+i\operatorname{sen}45)=(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)$; c) $2(\cos 300+i\operatorname{sen}300)=1-\sqrt{3}\,i$

24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a) $-3-i$; b) $1+i$; c) $+3i$.

25. Escribir en forma binómica: $6(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen}30^\circ)$. Sol: $3\sqrt{3}-3i$

26. Hallar el módulo y el argumento de: a) $(1+i)/(1-i)$. b) $(1+i)(2i)$. Sol: a) 1_{90°; b) $\sqrt{8}_{\ 135^\circ}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares 3_α, α variable? ¿y los que tienen ρ_{90°, ρ variable?. Sol: a) circunferencia de centro (0,0) y radio 3; b) semieje OY positivo

28. Dado $z=\rho_\alpha$. Expresar en forma polar: a) $-z$, b) z^{-1}, c) el conjugado de z, d) z^3.

Sol: a) $\rho_{180^\circ+\alpha}$; b) $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{-\alpha}$; c) $\rho_{-\alpha}$; d) $\rho^3{}_{3\alpha}$

Sumas, restas, productos, divisiones, mixtos

1. Efectuar las siguientes operaciones entre números complejos:

a) $(2+3i)+(4-i)$; b) $(3+3i)-(6+2i)$; c) $(3-2i)+(2+i)-2(-2+i)$; d) $(2-i)-(5+3i)+(1/2)(4-4i)$.

Sol: a) $(6+2i)$; b) $(-3+i)$; c) $(9-3i)$; d) $-1-6i$

2. Multiplicar los siguientes números complejos:

a) $(1+2i)(3-2i)$; b) $(2+i)(5-2i)$; c) $(i+1)(3-2i)(2+2i)$; d) $3(2-i)(2+3i)i$. Sol: a) $7+4i$; b) $12+i$; c) $8+12i$; d) $-12+21i$

3. Efectuar las siguientes divisiones de números complejos:

a) $(2+i)/(1-2i)$; b) $(7-i)/(3+i)$; c) $(5+5i)/(3-i)$; d) $(3-i)/(2+i)$; e) $(18-i)/(3+4i)$. Sol: a) i; b) $2-i$; c) $1+2i$; d) $1-i$; e) $2-3i$

4. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

a) 5-3[3+(2/3)i]; b) [2i (-i+2)] / (1+i); c) $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$; d) [(1+3i)(1+2i)]/(1+i).

Sol: a) -4-2i; b) 3+i; c) -2-i; d) 5i

5. Dado el número complejo z=2+2i, calcular y representar: a) su conjugado ($\bar{z}$); b) la suma $z+\bar{z}$; c) el producto $z\cdot\bar{z}$.

Sol: a) 2-2i; b) 4; c) 8

6. Calcular: a) (3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i); b) (3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i); c) (3+2i)+(2-4i)6.

Sol: a) (5+9i); b) 11+9i; c) 15-22i

7. Efectuar los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica:

a) (cos30º+isen30º)[2(cos15º+isen15º)]

b) [2(cos23º+isen23º)] [3(cos37º+isen37º)]

c) [5(cos33º+isen33º)]2_{57°

d) (2+2i)(1-i); e) (3+4i)1_{180°.

Sol: a) $2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; b) $6_{60^\circ} = 3\sqrt{3}+3i)$; c) $10_{90^\circ}=10i$; d) $4_{0^\circ}=4$; e) $5_{233^\circ}=-3-4i$

8. Efectuar las operaciones: a) $1_{150^\circ}3_{30^\circ}$; b) $6_{60^\circ}:2_{15^\circ}$; c) $2_{20^\circ}1_{30^\circ}2_{70^\circ}$; d) $6_{(2\pi/3)}:3_{90^\circ}$; e) $(5_{\pi/9})^9$; f) $(2+2i)^4$.

Sol: a) 3_{180°; b) 3_{45°; c) 4_{120°; d) 2_{30°; e) 59_{180°; f) 64_{180°

9. Efectuar las operaciones: a) $2_{105^\circ}3_{85^\circ}$; b) $4_{65^\circ}:2_{15^\circ}$; c) $5_{22^\circ}2_{28^\circ}1_{30^\circ}$; d) $4_{150^\circ}:2_{(\pi/2)}$; e) $(2_{20^\circ})^3$; f) $(3_{60^\circ})^4$

Sol: a) 6_{190}; b) 2_{50}; c) 10_{80}; d) 2_{60}; e) 8_{60}; f) 81_{240}

10. Calcular el inverso de los números complejos siguientes y representar gráficamente el resultado:

a) $2_{(\pi/2)}$ b) 4i c) -3+i.

Sol: a) $(1/2)_{(-\pi/2)}$; b) -0,25i; c) (-3/10)-(1/10)i

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo? ¿Y su argumento?

Sol: a) perpendicular; b) módulo=(1/r), argumento=-α

12. Simplificar las expresiones: $a)\dfrac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}},\ b)\dfrac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}},\ c)\dfrac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

Sol: a) 1_{30°; b) 2_{30°; c) 1_{330°

13. Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos:

a) (3+2i)+(2-3i); b) (-3+2i)+(-2-i); c) (2-i)i; d) (-2+i)i.

Sol: a) (5-i); b) (-5+i); c) (1+2i); (-1-2i)

14. Calcular los siguientes productos: a) 2(cos23º+isen23º).5(cos12º+isen12º).

Sol: 10(cos35º+isen35º)

b) (1+i)(2_{30°). c) 2(cos18º+isen18º) (3_{22°).

Sol: (-1+ $\sqrt{3}$)+(1+ $\sqrt{3}$)i; c)6_{40°

15. Resolver las ecuaciones: a) $x^3-27=0$ b) $x^5+32=0$.

Sol: a) x=3; x=3_{120°; x=3_{240°; b) $2_{36^\circ+72^\circ k}$ k=0,1,2,3,4

16. Dados z=(1,3), w=(2,1) Hallar z-w; zw; z^{-1}.

Sol: a) -1+2i; b) -1+7i; c) (1/10)-(3/10i)

17. Dados z=-1+3i, w=-2+i. Calcular y representar

a) z+w; b) zw; c) z^2, d) z+ $\overline{w}$; e) z/w.

Sol: a) -3+4i; b) -1-7i; c) -8-6i; d) -3+2i; e) 1-i

18. Efectuar las siguientes operaciones: a) $6_{90^\circ}\sqrt{2}_{\,15^\circ}$. b) $8_{120^\circ}/4_{\pi/2}$.

Sol: a) $6\sqrt{2}_{\,105^\circ}$, b) 2_{30°

19. Hallar $\dfrac{i^{32}i^{17}}{i^2i^3}$

Sol: 1

20. Hallar el módulo de los complejos: a) z=-2i(1+i)(-2-2i)(3); y b) $w=\dfrac{(2-i)\cdot(-1+2i)}{(1-i)\cdot(1+i)}$

Sol: a) 24; b) 5/2

21. Representar gráficamente las sumas: a) (-i)+(3-i); b) (-2+i)+(3-2i).

22. Representar gráficamente el número complejo 3-2i. Aplicarle un giro de 90º alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora 3-2i por i. Sol: 2+3i; 12+5i

23. Hallar el módulo de $z = \dfrac{2-4i}{4+2i}$. Sol: |z|=1

Ecuaciones

1. Resolver las siguientes ecuaciones y determinar en qué campo numérico tienen solución:

a) $x^2+4=0$; b) $x^2-9=0$; c) $x^2+1=0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) ± 3; c) $\pm i$

2. Resolver las ecuaciones: a) $x^2-2x+5=0$; b) $x^2-6x+13=0$; c) $x^2-4x+5=0$. Sol: a) $1\pm 2i$; b) $3\pm 2i$; c) $2\pm i$

3. Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta y=x. ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: reales: (1,1), (-1,-1)

4. Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta y=x-3. ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: imaginarias $x=3/2 \pm (\sqrt{7}/2)i$

5. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?.

a) $x^2-3x+2=0$ b) $x^2-2x+2=0$ c) $2x^2-7x+3=0$ d) $(x^2/2)+8=0$.

Sol: a) Real, x=2, x=1; b) Imaginaria $x=1\pm i$; c) Real, x=1/2, x=3; d) Imaginaria, $x=\pm 4i$

6. Calcular los puntos de intersección de la elipse $(x^2/4)+(y^2/9)=1$ con la recta x=5. Sol: $\pm 9/4\, i$

7. Resolver las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a) $x^2-4=0$ b) $x^2-5=0$; c) $x^2+1=0$. Sol: a) ± 2; b) $\pm\sqrt{5}$; c) $\pm i$

8. Resolver las ecuaciones: a) $x^2-10x+29=0$ b) $x^2-6x+10=0$ c) $x^2-4x+13=0$.

Sol: a) $5\pm 2i$; b) $3\pm i$; c) $2\pm 3i$

9. Representar gráficamente las raíces de las ecuaciones:

a) $x^2+4=0$ b) $x^2+1=0$ c) $x^2-9=0$ d) $x^2+9=0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) $\pm i$; c) ± 3; d) $\pm 3i$

10. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 2+2i y 2-2i.

(Recuerda: x1+x2=(-b/a); x1.x2=(c/a). Sol: $x^2-4x+8=0$

11. Resolver la ecuación $x^3+27=0$. Representa gráficamente todas sus soluciones.

Sol: $x=3_{180º}$, $x=3_{300º}$, $x=3_{60º}$

12. Resolver la ecuación de segundo grado $x^2-2x+17=0$. Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?. ¿Se puede generalizar el resultado?. Sol: a) $1\pm 4i$; b) conjugadas; c) sí

13. Resolver las ecuaciones: a) $x^3-8=0$; b) $x^5-32=0$; c) $x^4-81=0$; d) $x^3-1=0$.

Sol: a) $x=2_{120ºk}$ k=0,1,2; b) $x=2_{72ºk}$ k=0,1,2,3,4; c) $x=\pm 3$; $x=\pm 3i$; d) x=1, $x=1_{120º}$, $x=1_{240º}$

14. Resolver la ecuación $x^2-4x+5=0$ y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a) $2 \pm i$

15. Resolver las ecuaciones $x^6+64=0$ y $x^4+81=0$. Sol: a) $x=2_{90^o+60^o k}$ k=0,1,2,3,4,5; b) $x=3_{45^o+90^o k}$ k=0,1,2,3

16. Escribir una ecuación de raíces 1+3i, 1-3i. Sol: $x^2-2x+10=0$

17. Probar que 3+i y 3-i son raíces de la ecuación $x^2-6x+10$. Sol: $[x-(3+i)][x-(3-i)]=x^2-6x+10$

18. Resolver la ecuación: a) $x^4+1=-35$. Sol: $x=\sqrt{3} \pm \sqrt{3}\,i$; $x=-\sqrt{3} \pm \sqrt{3}\,i$

Potencias, raíces, mixtos

1. Calcular las potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23}; d) $(2+2i)^4$. Sol: a) -46-9i; b) 8+6i; c) -i; d) -64

2. Calcular: a) i^{27}; b) i^{48}; c) i^7; d) i^{12}; e) i^{33}; f) i^{35}. Sol: a) -i; b) 1; c) -i; d) 1; e) i; f) –i

3. Sabemos que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$. Calcular:

a) $z_1+2z_2-z_3$ b) $z_1(z_2+z_3)$ c) z_2^2 d) $2z_1-z_2+z_3$. Sol: a) 11-5i; b) -26i; c) 7-24i; d) 2-4i

4. Calcular: a) $(1+2i)^3$ b) $(-3-i)^4$ c) $(1-3i)^2$. Sol: a) -11-2i; b) 28+96i; c) -8-6i

5. Calcular: a) i^{210} b) i^{312} c) i^{326} d) i^{1121}. Sol: a) -1; b) 1; c) -1; d) i

6. Calcular: a) $(1+i)^3$ b) $(1-i)^3$ c) $(-1+i)^3$ d) $(-1-i)^3$. Sol: a) -2+2i; b) -2-2i; c) 2+2i; d) 2-2i

7. Calcular: a) $1/i^3$ b) $1/i^4$ c) i^{-1} d) i^{-2}. Sol: a) i; b) 1; c) -i; d) -1

8. Dados los complejos: $z_1=3_{45^o}$; $z_2=2_{30^o}$ y $z_3=-2i$. Calcular:

a) $z_1 z_3$ b) $z_1 / (z_2)^2$ c) $(z_1)^2/[z_2(z_3)^3]$. Sol: a) 6_{315^o}; b) $(3/4)_{-15^o}$; c) $(9/16)_{330^o}$

9. Calcular, expresando el resultado en forma polar:

a) $(1+i)^6$ b) $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$ c) $(1-i)^4$. Sol: a) 8_{270^o}; b) 1_{240^o}; c) 4_{180^o}

10. Calcular las potencias: a) $[2(\cos 45^o+i\,\mathrm{sen}\,45^o)]^4$ b) $(\sqrt{2}_{\,30^o})^6$ c) $[\sqrt[4]{3}(\cos 10^o+i\,\mathrm{sen}\,10^o)]^8$.

Sol: a) 16_{180^o}; b) $8_{180^o}=-8$; c) 9_{80^o}

11. Calcular las raíces quintas de la unidad. Hacerlo expresando 1 como complejo en forma polar.

Sol: 1_{0^o}; 1_{72^o}; 1_{144^o}; 1_{216^o}; 1_{288^o}

12. Calcular: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$ Sol: a) 1_{135^o}; 1_{315^o}; b) $\sqrt[6]{2}_{\,15^o}$, $\sqrt[5]{2}_{\,135^o}$; $\sqrt[6]{2}_{\,255^o}$;c) 4_{90}, 4_{270}

13. Calcular $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$ Sol: $1/\sqrt[6]{2}_{\,5^o+120^o k}$ k=0,1,2

14. Calcular las raíces siguientes y representar gráficamente las soluciones:

a) $\sqrt{-4}$; b) $\sqrt[3]{-27}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{i}}$ Sol: a) 2_{90^o}, 2_{270^o}; b) 3_{60^o}, 3_{180^o}, 3_{300^o}; c) 1_{30^o}, 1_{150^o}, 1_{270^o}; d) 3_{30^o}, 3_{150^o}, 3_{270^o}

15. Calcular las raíces: a) $\sqrt{4(\cos 60^{o}+i sen 60^{o})}$; b) $\sqrt[3]{27(\cos 180^{o}+i sen 180^{o})}$;

c) $\sqrt[4]{81(\cos 120^{o}+i sen 120)}$; d) $\sqrt[6]{i}$ Sol: a) $2_{30^{o}}$, $2_{210^{o}}$; b) $3_{60^{o}}$, $3_{180^{o}}$, $3_{300^{o}}$; c) $3_{40^{o}+90^{o}k}$ k=0,1,2,3; d) $1_{15^{o}+60^{o}k}$ k=0,1,2,3,4,5

16. ¿De qué número es (2+3i) raíz cúbica?. Sol: -46+9i

17. a) Operar la expresión $(1+3i)^2(3-4i)$ Sol: a) 50i

b) calcular las raíces cúbicas del resultado. Sol. b) $\sqrt[3]{50}_{\ 30^{o}+120^{o}k}$ k=0,1,2

18. Calcular el valor de $(i^4-i^3)/8i$ y encontrar sus raíces cúbicas. Sol: $(1/2)_{105^{o}+120^{o}k}$ k=0,1,2

19. Calcular: a) $(1+i)^8$; b) $(-1+i)^6$; c) $(1+\sqrt{3}\,i)^2$; d) $(-2-2i)^4$. Sol: a) 16_0; b) 8_{90}; c) 10_{120}; d) 64_{180}

20. Calcular $(i^4+i^5)/\sqrt{2}\,i$. Escribir el resultado en forma polar. Sol: $1_{315^{o}}$

21. a) Si una raíz cúbica de un número es 2i, calcular las otras dos raíces y ese número.

b) Calcular $(\cos 10^{o}+i sen 10^{o})^8$ Sol: a) $2_{210^{o}}$, $2_{330^{o}}$; $-8i=8_{270^{o}}$; b) $1_{80^{o}}$

22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a) 2+2i b) $1+\sqrt{3}$ c) $-2+2\sqrt{3}\,i$.

Sol: a) $\sqrt{2}_{\ 15^{o}}$, $\sqrt{2}_{\ 135^{o}}$, $\sqrt{2}_{\ 255^{o}}$; b) $\sqrt[6]{2}\ 20_{^{o}+120^{o}k}$ k=0,1,2,3,4,5; c) $\sqrt[3]{2}_{\ 40^{o}+120^{o}k}$ k=0,1,2

23. Calcular: $z=\sqrt[3]{\dfrac{8}{2-2i}}$ Sol: $\sqrt{2}_{\ 15^{o}+120^{o}k}$ k=0,1,2

24. Hallar las raíces cúbicas de a) -1 y b) -i. Sol: a) $1_{60^{o}}$, $1_{180^{o}}$, $1_{300^{o}}$; b) $1_{90^{o}}$, $1_{210^{o}}$, $1_{330^{o}}$

25. Calcular las tres raíces de $\sqrt[3]{\dfrac{3+3i}{-3+3i}}$ en foma polar: Sol: $1_{90^{o}}$; $1_{210^{o}}$; $1_{330^{o}}$

26. a) Calcular: i^{14}, i^{18}, i^{33}

b) Si $z_1 = 2-2i$; $z_2 = 1+3i$; y $z_3 = 2i$. Hallar: $2z_1 - z_2 + 2z_3$; $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$; $(z_1)^2$.

c) Hallar: $(1+2i)^3$

d) Hallar x para que se verifique que (x-i)/(2+i) = 1-i Sol: a) -1, -1, i; b) 3-3i, 4, -8i; c) -11-2i; d) x=3

27. Calcular $\sqrt[3]{-27i}$. Sol: $3_{90^{o}}$, $3_{210^{o}}$, $3_{330^{o}}$

28. Calcular las siguientes potencias: a) $[2(\cos 25+i sen 25)]^4$. b) $(\sqrt{3}_{\ 30^{o}})^8$. Sol: a) $16_{100^{o}}$; b) $81_{240^{o}}$

29. Hallar el módulo de: $5.(i^2+i^{-3})/(i^2-3i)$. Sol: z=-1-2i; $|z|=\sqrt{5}$

30. Calcular $(-2+2i)^{64}$ Sol: $8^{32}_{\ 8640^{o}} = 8^{32}$

31. Calcular el valor de $(i^3-i^{-3})/(2i)$ y hallar sus raíces cúbicas. Sol: a) -1; b) $1_{60^{o}}$, $1_{180^{o}}$, $1_{300^{o}}$

32. a) Calcular el valor de la fracción $(z^3+z)/(z^2+2)$ para z=1+i

b) Dar el valor de la misma fracción para $\bar{z}$ =1-i. Sol: a) 1/2+i; b) 1/2-i

33. Calcular sin desarrollar los binomios y expresar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^4$ b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$ Sol: a) $4_{180^o}=-4$; b) $64_{0^o}=64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a) $(1-2i)^3$; b) $25/(3+4i)$; c) $((2+i)/(1-2i))^2$. Sol: a) 11+2i; b) -3-4i; c) 1

35. Calcular el valor de $(z^2+z-1)/(z^2-2z)$ para z=1+i. Sol: -3/2 i

36. Hallar: a) $(1+i)^{20}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, c) $(-\sqrt{3}-i)^{12}$ y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a) $2^{10}{}_{180^o} = -2^{10}$; b) $4^{30}{}_{180^o} = -4^{30}$; c) $2^{12}{}_{0^o} = 4096$

37. Hallar $z=(\cos 20^o+i\,\text{sen}20^o)^{10}$, $w=(\cos 50^o-i\,\text{sen}50^o)^{30}$ y expresar el resultado en forma binómica. Hallar z^{-1} y el conjugado de w. Sol: $z=(\cos 200^o+i\,\text{sen}200^o)$; $w=(\cos 300^o+i\ \text{sen}300^o)=1/2-\sqrt{3}/2\ i$; $z^{-1}=1_{160^o}$; $\overline{w}=1/2+\sqrt{3}/2\ i$

38. Hallar el módulo y el argumento de $\left(\dfrac{2+2i}{2-2i}\right)^4$ Sol: $1_{360^o} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c) 1/32, d) 243i, e) -32i, f) $\sqrt{3}+i$.

Sol: a) $1_{0^o+72^ok}$; b) $1_{36^o+72^ok}$; c) $(1/2)_{0^o+72^ok}$; d) $3_{18^o+72^ok}$; e) $2_{36^o+72^ok}$; f) $\sqrt[5]{2}_{\,6^o+72^ok}$ ….k=0,1,2,3,4

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a) 5+12i y b) 1/(3+4i.) Sol: a) 3+2i; -3-2i; b) 2/5-1/5i; -2/5+1/5i

41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de $\dfrac{2i^9+i^{-7}}{3i}$. Expresar el resultado en forma binómica. Sol: 1, $-1/2+\sqrt{3}/2\ i$, $-1/2-\sqrt{3}/2\ i$

Incógnitas reales o complejas

1. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1+xi)^2$ sea imaginario puro?. Sol: $x=\pm 1$

2. Calcular los números x e y para que se verifique la igualdad: (3+xi)+(y+3i)=5+2i. Sol: x=-1; y=2

3. Determinar el valor de x para que se verifique la igualdad: (x-i)/(1-i)=(2+i). Sol: x=3

4. Calcular los números reales x e y para que se verifique (-4+xi)/(2-3i)=(y-2i). Sol: x=-7; y=1

5. Determinar x para que el producto (3+2i)(6+xi) sea: a) un número real. Sol: a) x=-4

b) un número imaginario puro. Sol: x=9

6. Determinar los números reales x e y para que se cumpla: $\dfrac{x+2i}{1-i}+yi=1$. Sol: x=4; y=3

7. Calcular a para que el complejo z = (4+ai)/(1-i) sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a) a=4; b) a=-4

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo: z=(x+i)/(x-i), $x \in \mathbb{R}$. Sol: |z|=1

9. Determinar x para que el módulo del complejo z=(x+i)/(1+i) sea $\sqrt{5}$. Sol: $x=\pm 3$

10. Resolver: (4+xi)/(2+i) = y+2i. Sol: x=7, y=3

11. Hallar el valor de x para que la operación (2-xi)/(1-3i) tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales. Sol: x=6, x=-2/3, x=1

12. Hallar x para que el número (3-xi)(2+i) esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol: x=-1

13. Hallar x e y para que se cumpla: a) (x-i).(y+2i)=4x+i Sol: a) x=2, y=3

b) $\frac{-4+xi}{+2i}=y+3$ Sol: b) x=8, y=1

14. Hallar x, para que la expresión $z=\frac{4+xi}{2+i}$ sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a) x=2; b) x=-8

15. Hallar k, para que |z-2| = 3, siendo z=k+3i. Sol: k=2

16. Determinar el valor real de x de modo que el afijo del producto de los números complejos 3+xi y 4+2i sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: x=1

17. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases}(1-i)x+iy=0\\(2+i)x+2y=1+7i\end{cases}$ Sol: x=1+i; y=2i

18. Resolver las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo; despejar y calcular su valor:

a) (2-2i)z=10-2i; Sol: z= 3+2i

b) $\frac{z}{3+i}$=*2-i*; Sol: z=7-i

c) $\frac{z}{3+4i}+\frac{2z+5i}{1-2i}=2+2i$ Sol: z=4-3i

d) $\frac{z}{-z}+\frac{2z-2i}{1-i}=3-2i$ Sol: z=1-2i

19. Despejar z y calcular su valor en las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{z}{1+i}+(2-3i)=(4-4i)$

b) $\frac{3+}{z}=1+\quad i$

c) (2+2i)z=(10+2i).

Sol: a) 3+i; b) 1-i; c) 3-2i

20. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que α y β son números complejos:

a) $\begin{cases}\alpha i+(2+i)\beta=-3+7i\\(2-i)\alpha+(2+i)\beta=5+3i\end{cases}$

b) $\begin{cases}\alpha(1+i)+(1+i)\beta=5+5i\\(2+i)\alpha+i\beta=2+2i\end{cases}$

c) $\begin{cases}(1+i)\alpha+(2+i)\beta=9+2i\\2\alpha-i\beta=5-4i\end{cases}$

Sol: a) α =3+i; β =2i; b) α =1-i; β =3+i; c) α =3-i; β =2-i

21. Calcular z en las ecuaciones siguientes: a) $\frac{z}{1-2i}+1-i=2+i$ Sol: z=5

b) $\frac{z}{2+i}+\frac{z-i}{2-i}=3-2i$ Sol: z=7/2-2i

22. Resolver el sistema (x e y son números complejos): $\begin{cases}(2+i)x+(1+i)y=2+3i \\ (2-i)x-iy=0\end{cases}$ Sol: x=i; y=2-i

23. Hallar el número complejo z que cumpla: [z/(2-i)]+[(2z-5)/(2-i)]=1+2i. Sol: z=3+i

24. Hallar z tal que z^3 sea igual al conjugado de z. Sol: z=i, z=1, z=-1, z=0

25. Resolver la ecuación $(1-i)z^2-7=i$. Sol: z=2+i y z=-2-i

Problemas y método de Moivre

Problemas

1. Si el producto de dos números complejos es -18 y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado 2i. ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?. Sol: 3_{45° y 6_{135°

2. El cociente de dos números complejos es 1/2 y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcular sus módulos y sus argumentos. Sol: $(1/2)_{0^\circ}$; $(1/4)_{0^\circ}$

3. Aplicar un giro de 90º sobre el punto A(3,1). Determinar, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes. Sol: a) (-1,3)

4. La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos 10. ¿De qué números complejos se trata?. Sol: (3+4i), (3-4i)

5. La resta de dos números complejos es 2+6i, y el cuadrado del segundo dividido por el primero es 2. Hallarlos. Sol: 4+2i, 6+8i; 4i, -2-2i

6. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto vale 11-16i. Sol: (3-2i); 2i

7. El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol: 3_{60°, 9_{120°.

8. La suma de dos números complejos es -5+5i; la parte real de uno de ellos es 1. Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol: (1+3i) y (-6+2i) ó (1+2i) y (-6+3i)

9. La suma de dos complejos es 5-i y su producto es 8+i. Hallar los números. Sol: 3-2i, 2+i

10. La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos 10 ¿Cuáles son los números complejos? Sol: (4+3i), (4-3i)

11. El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de unos de ellos dividido por el otro es 1/2. Calcular módulos y argumentos. Sol: 1_{45°, 2_{135°; 1_{135°, 2_{45°; 1_{225°, 2_{315°; 1_{315°, 2_{225°

12. Hallar z tal que: a) el conjugado de z sea igual a -z. b) el conjugado de z sea igual a z^{-1}. c) la suma del conjugado de z más z sea igual a 2. d) z menos el conjugado de z sea igual a 2i.

Sol: a) z=ki; b) $a+bi/a^2+b^2=1$; c) 1+ki; d) k+i

13. El complejo de argumento 70º y módulo 8 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 40º y módulo 2. Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol: $8_{30^o} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determinar el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por (1-i) se le suma al resultado (-3+5i) y se divide lo obtenido por 2+3i se vuelve al complejo de partida. Sol: 1+i

<u>Figuras geométricas</u>

15. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de P 3_{30^o}. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de Q y R y el número complejo. Sol: $Q=3_{150^o}=-3\sqrt{3}/2+3/2\,i$; $R=3_{270^o}$: -3i; 27i

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo $2_{\pi/2}$. Sol: 2_{150}, 2_{210}, 2_{270}, 2_{330}, 2_{30}

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo 1_{120}. Sol: 1_{30^o}, 1_{210^o}, 1_{300^o}

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX. Sol: 3_{0^o}, 3_{60^o}, 3_{120^o}, 3_{180^o}, 3_{240^o}, 3_{300^o}

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 2 u; el argumento de una de las raíces es 45º. Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol: 256; 2_{45}, 2_{90}, 2_{135}, 2_{180}, 2_{225}, 2_{270}, 2_{315}, 2_{0}

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo 1+2i.

Sol: 2+i, -2+i, -1-2i

<u>Método de Moivre</u>

21. Expresa en función de $\cos\alpha$ y $\text{sen}\,\alpha$ y utilizando la fórmula de Moivre:

a) $\cos 2\alpha$ y $\text{sen}\,2\alpha$ Sol: $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

b) $\cos 3\alpha$ y $\text{sen}\,3\alpha$. Sol: $\text{sen}3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha\ \alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$

22. Encuentra las fórmulas para calcular $\text{sen}\,4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$.

Sol: $\text{sen}4\alpha = 4\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\cos\alpha\,\text{sen}^3\alpha$; $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha$

23. Hallar $\text{sen}^3 5a$ y $\cos^2 5a$ sabiendo que sen a = 1/2 y a pertenece al primer cuadrante.

Sol: $\text{sen}^3 5a=1/8$; $\cos^2 5a=3/4$

24. Si sen x = 1/3 y $0<x<\pi/2$. Hallar sen 6x y cos 6x. Sol: $\text{sen}6x=460\sqrt{2}/729$; $\cos 6x=-329/729$