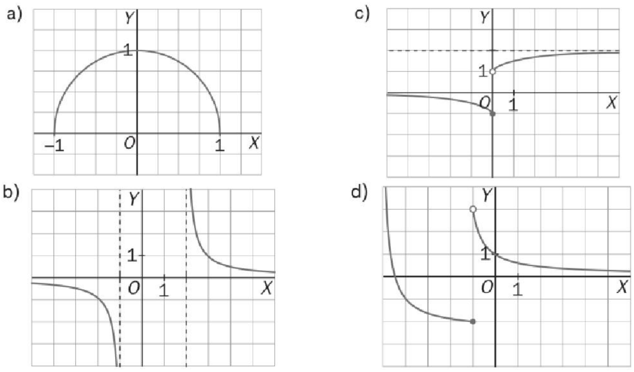
Ejercicios Funciones Elementales

1) Halla el dominio y recorrido de las funciones cuya gráfica se muestra a continuación:



2) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x-2}{x^2-x}$ b) $y=\sqrt{2}x^3+5x^2-\sqrt{8}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x^2+4}$

d) $y=\sqrt{x+5}$ e) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}$ f) $y=\sqrt[3]{x-5}$

g) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ h) $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$ i) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

j) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ k) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4}}$

l) $y=\sqrt{|x+5|-3}$ m) $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{x^2-4}$

n) $y=\pi+\operatorname{arctg}x$ ñ) $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{x}$

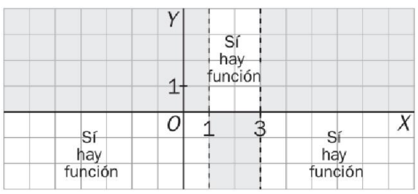
3) Halla el dominio y los cortes con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x+6}$ b) $f(x)=\sqrt{-3x}$

c) $f(x)=\sqrt{4x+12}+4$ d) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x(x^2-16)}$

4) Escribe la expresión analítica $y=f(x)$ de una función que cumpla lo señalado en la siguiente gráfica:

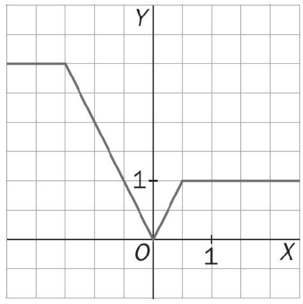


5) Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=\begin{cases}1-x & \text{si } x\le 1\\ x^2-2x & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $y=\begin{cases}x+2 & \text{si } x\le -1\\ -x & \text{si } -1<x\le 1\\ 3x-4 & \text{si } 1<x\end{cases}$

c) $y=\begin{cases}x-2 & \text{si } x<0\\ 3x-2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ -2x+8 & \text{si } 2\le x\end{cases}$ d) $y=\begin{cases}1 & \text{si } -3<x\le -1\\ x^2 & \text{si } -1<x<2\\ 2 & \text{si } x=2\\ 9-3x & \text{si } 2<x<4\end{cases}$

6) Encuentra la expresión analítica de la función cuya gráfica se muestra a continuación:



7) Dadas las funciones $f(x)=2x+1$; $g(x)=x^2-3$; $h(x)=\dfrac{x-5}{x+3}$, calcula:

a) $f(x)+g(x)$ b) $f(x)+h(x)$

c) $f(x)\cdot g(x)$ d) $f(x)\cdot h(x)$

e) $g(x):h(x)$ f) $(g\circ f)(x)$

g) $(f\circ g)(x)$ h) $(h\circ g)(x)$

8) Dadas las funciones : $f(x)=x^2$; $g(x)=\cos x$, calcula:

a) $f[g(\pi)]$ b) $f[g(\pi/4)]$ c) $g[f(0)]$

d) $(f\circ g)(x)$ e) $(g\circ f)(x)$ f) $(f\circ f)(x)$

9) La relación entre el precio por unidad *P* (en céntimos) para cierto producto y la demanda *D* (en miles de unidades) parece satisfacer

$$P=\sqrt{29-3D+D^2}$$

Por otra parte, la demanda se ha incrementado, durante los *t* años, desde 2005 de acuerdo a $D=2+\sqrt{t}$.

a) Expresar *P* en función de *t*.

b) Evalúe P cuando $t=15$.

10) Sea $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$. Demostrar que $f\left[f(x)\right]=x$, siempre que $a^2+bc\neq 0$ y $x\neq a/c$

11) Sea $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$. Hallar y simplificar:

a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b) $f\left[f(x)\right]$ c) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$

12) Estudia la función $f(x)=\log_4(x+1)$ hallando su dominio, recorrido, crecimiento, asíntotas y cortes con los ejes. Represéntala gráficamente. ¿A cuál de las dos siguientes se parece más; $y=\log_{1/2}x$ o $y=\ln x$? ¿Por qué?

13) Realiza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=|2x-6|$ b) $y=|-x^2+4|$

c) $y=|x^2-x-6|$ d) $y=\left|\dfrac{4}{x}\right|$

14) Dada la función $f(x)=x^2-2x$ calcula:

a) $f(-a)$ b) $f\left(a^{-1}\right)$ c) $f\left(\sqrt{a}\right)$

d) $f\left(a^2\right)$ e) $f\left(a+h\right)$ f) $f(a+h)-f(a)$

15) Calcula la función inversa o recíproca de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1-2x}{6}$ b) $y=\dfrac{3}{x}+4$ c) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$

d) $y=3+\sqrt{x}$ e) $y=5-\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{2}}$ f) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

Además representa gráficamente la función lineal y su inversa, y describe la propiedad que podemos observar en ellas.

16) Si componemos una función f con su inversa f^{-1} para obtener $\left(f\circ f^{-1}\right)$ y $\left(f^{-1}\circ f\right)$ ¿qué resultado se obtiene en ambos casos? Comprueba el resultado con la función $f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$.

17) Halla la inversa de las siguientes funciones:

a) $y=2^{x-2}$ b) $y=3^x+1$

c) $y=\log_2(x-4)$ d) $y=3-5^{2x-1}$

e) $y=7+\ln(2x-3)$ f) $y=\operatorname{sen}(x+\pi)$

g) $y=1+3\arccos x$ h) $y=\dfrac{2-\operatorname{tg}x}{3}$

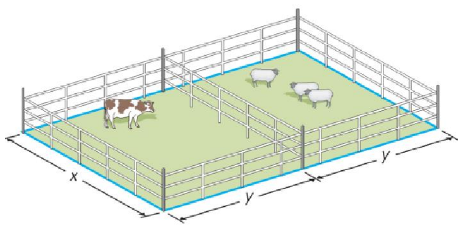
18) Una función es par cuando $f(-x)=f(x)$, y es impar cuando $f(-x)=-f(x)$. Averigua si las distintas funciones circulares son pares o impares o ninguna de las dos cosas.

19) Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y halla su dominio y recorrido.

a) $y=\sqrt{x-2}-1$ b) $y=-\sqrt{x+1}+3$

c) $y=-2\sqrt{x}$ d) $y=\sqrt{-x}+2$

20) Un granjero dispone de 120 m de valla para la construcción de dos cercados idénticos rectangulares con un lado común, tal y como se muestra en la figura:



a) Expresar el área $A(x)$ encerrada por ambos cercados en función de la anchura x.
b) ¿Cuál será el dominio de la función $A(x)$?
c) ¿Para qué valor de x el área encerrada será máxima?

21) La altura (en decímetros) que alcanza una pelota de tenis tras un lanzamiento viene dada por la expresión:

$$y=-\frac{16}{2025}x^2+\frac{9}{5}x+1{,}5$$

Donde x es la distancia horizontal medida desde el punto de lanzamiento.
a) ¿Desde qué altura ha sido lanzada la pelota?
b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
c) ¿Cuál es la longitud del lanzamiento?

22) Una granja de caracoles ha ajustado sus gastos de producción por x kilogramos de caracoles según la función

$$G(x)=2000+\frac{x^3}{200.000}$$

Sus ingresos se rigen por la fórmula:

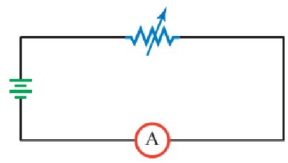
$$I(x)=8.000+2x-\frac{1}{1.000}x^2+\frac{x^3}{200.000}$$

Averigua el número de kilogramos de caracoles con el que se obtiene el beneficio máximo y dicho beneficio.

23) Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $y=\begin{cases}3x-2 & \text{si } x\le -2\\ x^2-4 & \text{si } -2<x<3\\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x\ge 3\end{cases}$ b) $y=\begin{cases}\left|x^2+3x\right| & \text{si } x<-1\\ -4 & \text{si } -2<x<3\\ -x+3 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

24) Una resistencia variable, un amperímetro, y una pila de 9 voltios se han conectado como se muestra en la siguiente figura.



La resistencia interna del amperímetro es de 4,5 ohmios. La intensidad de corriente I a través del amperímetro (en amperios) viene dada por:

$$I=\frac{9}{x+4{,}5}\qquad x\ge 0$$

Donde x es la resistencia, en ohmios, que proporciona la resistencia variable.
a) Hallar la intensidad de corriente que circula por el amperímetro cuando la resistencia variable es de 3 ohmios.
b) Determinar la resistencia variable que se corresponde con una intensidad de corriente de 0,24 amperios
c) Determinar la asíntota horizontal de la gráfica de I e indica cual es su significado en el contexto del problema.
d) Representa gráficamente la función.

25) Un globo esférico es inflado de modo que el radio del mismo (en cm) al cabo de t segundos es:

$$r(t)=3\sqrt{t}+5\quad,\quad 0\le t\le 4$$

a) ¿Cuál es el volumen final del globo?
b) Representa gráficamente la función $r(t)$.
c) Obtener la expresión que permite obtener, en función del tiempo, el área total de la superficie del globo. ¿Cuál es la superficie final?

26) Un parque natural ha tenido durante el verano pasado más visitantes de los esperados, por lo que el servicio de limpieza ordinario no ha podido retirar la suciedad que la masiva afluencia de público ha generado. Llegado el otoño, los gestores del parque se plantean hacer una inversión extraordinaria para eliminar la suciedad acumulada. El coste de eliminar el $p\%$ de estos restos es:

$$C(p)=\frac{16p}{110-p}$$

a) Sin hacer ningún cálculo, indica si esta función es creciente o decreciente.
b) Calcula cuánto costaría no eliminar ningún residuo, eliminar el 50% y eliminarlos todos.
c) ¿Para qué puntos del dominio de *C* interesa en la práctica estudiar esta función? ¿Qué valores toma *C* en esos puntos de su dominio?
d) Dibuja la gráfica de la función *C*.
e) ¿Qué proporción de suciedad acumulada se podrá eliminar si se aprueba una partida extraordinaria de 100.000 € destinada a tal fin.

27) De la función $f(x)=k{\cdot}a^x$ se sabe que $f(0)=5$ y $f(3)=40$.
a) ¿Cuánto valen *k* y *a*?
b) ¿Cuánto vale $f(2)$?
c) Razona si es o no una función inyectiva.
d) Halla la inversa $f^{-1}(x)$.

28) El crecimiento de dos tipos distintos de bacterias se rige, respectivamente por:
$N_1=6,2\,e^{0,49t}$, $N_2=4,1\,e^{0,54t}$ (*t*: horas; $N(t)$: miles)

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo coincidirá el número de bacteria de cada tipo?
b) A partir de este momento, ¿qué cultivo crecerá más rápidamente?

29) El radio es un elemento radiactivo. Una muestra de radio se descompone por emisión de radiaciones de acuerdo con la ecuación:

$$m=10{\cdot}e^{-4,36\cdot10^{-4}t}$$

Donde *m* es la masa de la muestra en gramos y *t* es el tiempo expresado en años.
a) ¿Cuántos gramos de radio hay inicialmente en la muestra?
b) ¿Cuántos gramos de radio habrá al cabo de 1000 años?
c) El periodo de desintegración de un elemento radiactivo se define como el tiempo que tarda una determinada cantidad de este elemento en reducirse a la mitad. Calcula el periodo de desintegración del radio.
d) Esboza de forma aproximada como sería la gráfica de la función $m(t)$, representando en el eje de abscisas el tiempo (en años) y en el de ordenadas la masa (en gramos) de la muestra.

30) Deducir una función $f(x)=a+\log_3(x-c)$ si $f(11)=10$ y su gráfica tiene una asíntota vertical $x=2$.

31) Si tomamos, por vía oral, un comprimido de 100 mg de un medicamento para el asma, y este es el único medicamento que tomamos, entonces la cantidad total *C* presente en el flujo sanguíneo, *t* minutos después de la toma, viene dada por:

$$C(t)=100\left(1-0,9^t\right) \quad \text{para } 0\le t\le 10$$

a) Determinar la cantidad de medicamento que habrá en la sangre 5 minutos después de la toma.
b) Determinar el número de minutos que deben pasar para que la cantidad de medicamento presente en sangre sea la mitad de la dosis ingerida.
c) Representa gráficamente la función $C(t)$ indicando además su dominio y recorrido.

32) Para describir los efectos de un terremoto se utiliza la escala de Richter. Según esta escala, la magnitud *M* de un terremoto viene dada por la expresión: $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$

E: Energía liberada por el terremoto en julios.
E_0: Constante de valor $2,5\cdot10^4$ julios.

a) Calcula la energía liberada por el terremoto de Méjico del año 1985 si su magnitud fue 7,8 en la escala de Richter.
b) Halla la magnitud en la escala de Richter del terremoto de San Francisco de 1906 sabiendo que se liberó aproximadamente $5,96\cdot10^{16}$ julios.
b) Esboza de forma aproximada la gráfica de la función *M* considerando a *E* como variable independiente.

33) Escribir la ecuación de una función cuya gráfica se describe con palabras a continuación:

a) La gráfica de $y=\cos x$ se estira verticalmente por un factor 3, y a continuación se desplaza 5 unidades hacia abajo. Un ciclo de $y=\cos x$ en $[0,2\pi]$ se comprime a $[0,\pi/3]$ y el ciclo comprimido se desplaza $\pi/4$ hacia la izquierda.

b) Un ciclo de $y=\operatorname{sen} x$ en $[0,2\pi]$ se estira hasta $[0,8\pi]$ y a continuación el ciclo estirado se desplaza $\pi/12$ unidades horizontalmente hacia la derecha. La gráfica también se comprime verticalmente a un factor $3/4$, y a continuación se refleja en el eje X.

34) Haz la representación gráfica de las siguientes funciones indicando sus principales características (dominio, recorrido, periodo, amplitud).

a) $y=2\cos(\pi x+\pi)$ b) $y=2-2\operatorname{sen}(\pi x)$

c) $y=3+\operatorname{sen}(x-\pi)$ d) $y=10\cos\left(120\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

35) Demostrar que $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\right)\right]=\frac{4}{x}$

36) Halla todos los valores de $t\in[0,2\pi]$ que satisfacen la ecuación $\operatorname{arcsen} t=\arccos t$

37) Comprueba que es cierta la relación:

$$\arccos(-t) = \pi - \arccos(t)$$

y haz uso de ella para evaluar $\arccos\left[-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$.

38) Tiramos de una masa sujeta a un muelle sobre una superficie sin rozamiento y, al soltarla, vemos que oscila con un movimiento vibratorio. La distancia que separa la masa de su posición de equilibrio en cada instante viene dada por la expresión siguiente: $x(t) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$.

El tiempo t se mide en segundos y la desviación desde la posición de equilibrio, $x(t)$, se mide en metros.

a) Halla el periodo de esta función, que corresponde al tiempo que tarda la masa en realizar una oscilación completa.
b) Indica la distancia máxima que separa la masa de su posición de equilibrio.
c) Halla el tiempo mínimo necesario para que la masa pase por los puntos $x = 0{,}5$ m y $x = -2$ m

39) Cada vez que tu corazón late, tu presión sanguínea primero aumenta y después disminuye, de modo que tu corazón "descansa" entre dos latidos. El máximo y mínimo de la presión sanguínea se llaman presión sistólica y diastólica respectivamente. Unos valores de presión sistólica/diastólica de 120/80 pueden considerarse normales (medidos en mmHg).
La presión sanguínea de cierta persona puede modelarse por la función:

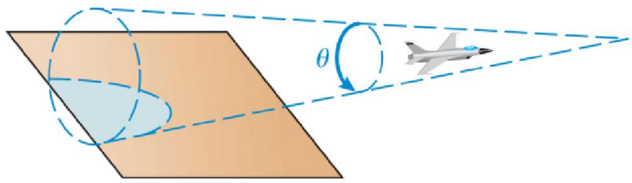
$$p(t) = 115 + 25\,\mathrm{sen}(160\pi t)$$

a) Hallar el periodo de $p(t)$.
b) Hallar el número de latidos por minuto.
c) Realizar la gráfica de $p(t)$.
d) Hallar las presiones sanguíneas sistólica y diastólica y compararla con los valores normales.

40) Cuando un avión vuela más rápido que la velocidad del sonido, las ondas sonoras que se forman toman una silueta cónica, y cuando el cono alcanza el suelo, se oye un estruendo. Si llamamos θ al ángulo en el vértice del cono, entonces se cumple:

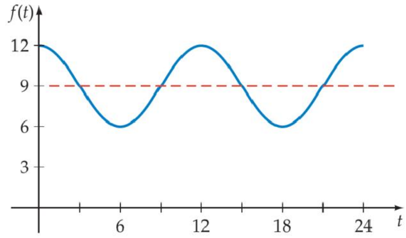
$$\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{330\text{m/s}}{v} = \frac{1}{M}$$

Donde v es la velocidad (en m/s) del avión y M representa el número Mach.



a) ¿Cuál es la velocidad del avión si este vuela a Mach 2?
b) ¿Cuál es el número Mach si este vuela a 990 m/s?
c) ¿Cuál es la velocidad del avión si el ángulo del cono de sonido es de 60º?
d) ¿Cuál es el ángulo del cono formado si el avión vuela a 466,69 m/s?
e) Representa la función $M(\theta)$ en el intervalo $(0, 180^\circ)$

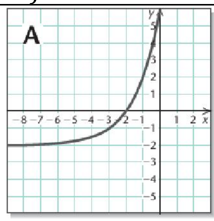
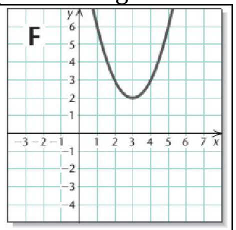
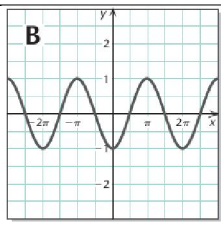
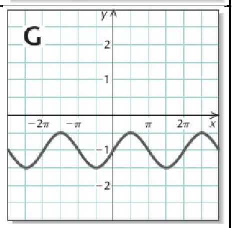
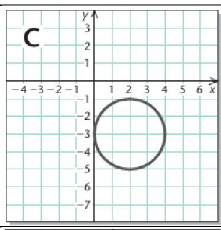
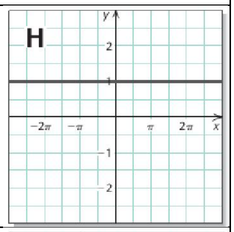
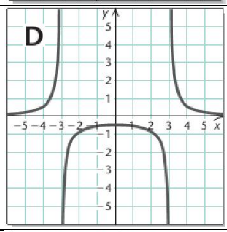
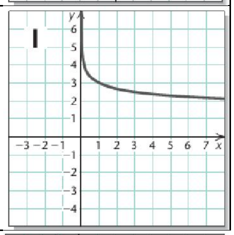
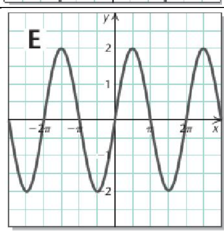
41) Durante las 24 horas del día, la marea sube y baja la profundidad del agua (en dm) en un embarcadero tal y como de muestra en la siguiente gráfica. Escribir una función $f(t) = A\cos Bt + d$ que proporcione la profundidad del agua en función del tiempo t.



42) La mayoría de destellos producto de los relámpagos van de nube a nube y sólo algunos van de nube a tierra. La proporción a la que se producen estos tipos de destellos parece depender de la latitud. Algunos estudios empíricos han concluido que la proporción de los destellos nube a nube en una tormenta N_b y los destellos nube a tierra N_t se aproxima por: $\frac{N_b}{N_t} = 4{,}16 + 216\cos 3\phi$

donde ϕ es la latitud (limitada a regiones no polares $0^\circ \le \phi \le 60^\circ$) Realizar la gráfica de esta proporción para latitudes $0^\circ \le \phi \le 60^\circ$

43) Identifica la ecuación con su correspondiente gráfica:

	**1** $y = \frac{4}{x^2-9}$ **2** $y = \frac{-\mathrm{sen}\,x}{2} - 1$	
	**3** $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ **4** $y = \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x$	
	**5** $y = 3 - \log x$ **6** $y = 2^{x+3} - 2$	
	**7** $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **8** $y = -x^3 + 3x^2$	
	**9** $y = (x-3)^2 + 2$ **10** $y = -\cos x$