

VECTORES

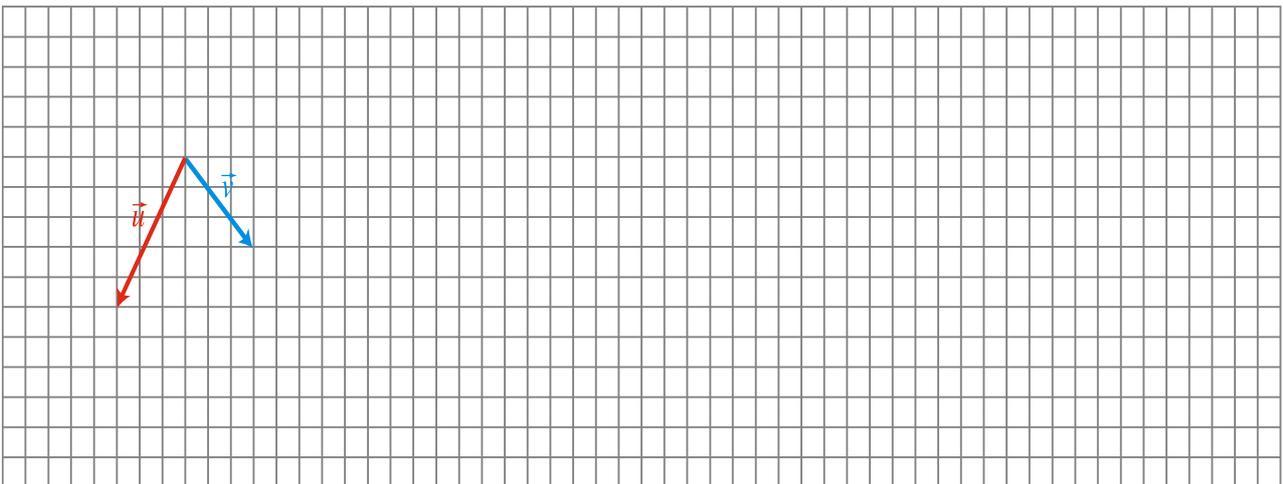
Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. (2p)

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + 2\vec{v}; \quad \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

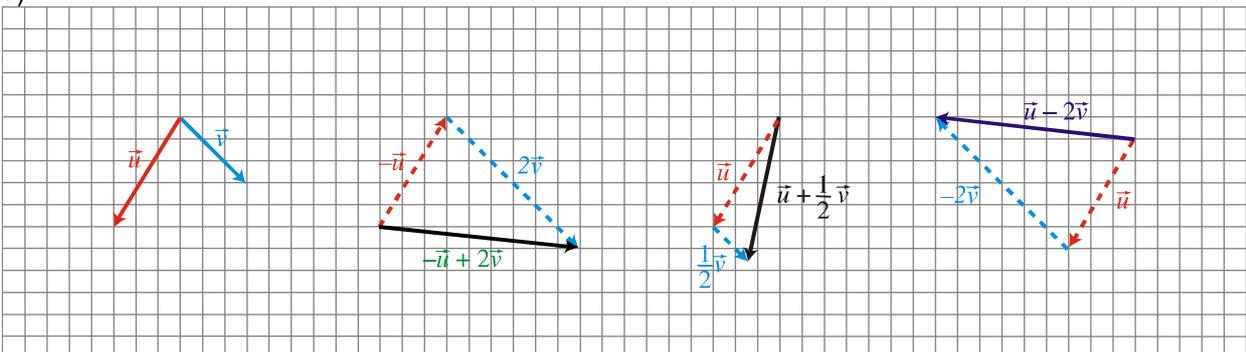


b) Dados los vectores $\vec{a} \left(-\frac{3}{4}, 2 \right)$ y $\vec{b} (2, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad -2\vec{a} + \vec{b}; \quad -4\vec{a} + \vec{b}$$

Solución:

a)



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} &= \left(\frac{-3}{4}, 2\right) - \frac{1}{2}(2, -2) = \left(\frac{-3}{4}, 2\right) - (1, -1) = \left(\frac{-7}{4}, 3\right) \\
 -2\vec{a} + \vec{b} &= -2\left(\frac{-3}{4}, 2\right) + (2, -2) = \left(\frac{3}{2}, -4\right) + (2, -2) = \left(\frac{7}{2}, -6\right) \\
 -4\vec{a} + \vec{b} &= -4\left(\frac{-3}{4}, 2\right) + (2, -2) = (3, -8) + (2, -2) = (5, -10)
 \end{aligned}$$

2. (1p)

Escriba el vector \vec{a} $(0, 17)$ con combinación lineal de \vec{b} $\left(\frac{1}{5}, 3\right)$ y \vec{c} $(-1, 2)$.

Solución:

Tenemos que encontrar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5}, 3\right) + n \cdot (-1, 2)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5}, 3m\right) + (-n, 2n)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5} - n, 3m + 2n\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n = m \\ 17 = 15n + 2n \end{cases} \Rightarrow 17 = 17n \Rightarrow n = 1 \\ m = 5n = 5$$

Por tanto:

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = 5\left(\frac{1}{5}, 3\right) + (-1, 2)$$

3. (1.5p)

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ y $\vec{w}(-1, 3)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1) \cdot \left(\frac{1}{3}, 2\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot 2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

$$b) (2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(2(2, -1) + 3\left(\frac{1}{3}, 2\right) \right) \cdot (-1, 3) = ((4, -2) + (1, 6)) \cdot (-1, 3) = (5, 4) \cdot (-1, 3) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = -5 + 12 = 7$$

$$c) (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{u} = ((2, -1) \cdot (-1, 3))(2, -1) = (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3)(2, -1) = (-2 - 3)(2, -1) = -5 \cdot (2, -1) = (-10, 5)$$

4. (1.5p)

Si $\vec{x}(2, -4)$ e $\vec{y}\left(3, \frac{5}{2}\right)$. Calcula:

- Un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que \vec{x} .
- El ángulo formado por \vec{x} e \vec{y} .

Solución:

a) Hallamos el módulo de \vec{x} :

$$|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{x} será:

$$\left(\frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{-4}{2\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$b) \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{(2, -4) \cdot \left(3, \frac{5}{2}\right)}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + \frac{25}{4}}} = \frac{6 - 10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{61}{4}}} = \frac{-4}{2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{61}}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{305}} \approx -0,23$$

$$\text{Luego } (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \approx 103,24^\circ.$$

5. Sabiendo que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \wedge \vec{v} = 150^\circ$, calcula: (1.5p)

- $\vec{u} \cdot (2\vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$
- $(-\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$

Nota: Para ver el ángulo que forman los vectores, ayúdate de un dibujo, utilizando el papel cuadriculado que se te ha proporcionado.

6. Obten dos vectores perpendiculares unitarios para cada uno de los siguientes vectores: (1p)

$$\vec{a} = (-3, -1) \quad \vec{b} = (0, -3)$$

7. Dadas las siguientes parejas de vectores,

- $\vec{a} = (3, 0)$ y $\vec{b} = (0, -2)$
- $\vec{a} = (5, 3)$ y $\vec{b} = (-5, -3)$

- Calcula el ángulo que forman los vectores de cada pareja. (1p)
- ¿Observas alguna relación especial en cada una de las parejas? ¿Cuál? Razona tu respuesta. (0.5p)

