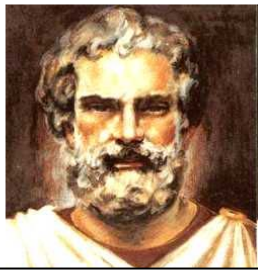
LOS TEOREMAS DE

THALES

PITÁGORAS

Teorema de Tales

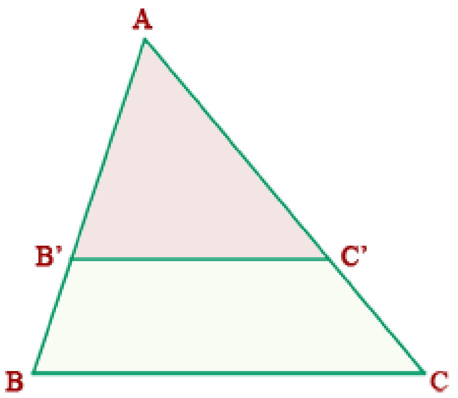
Existen dos teoremas en relación a la geometría clásica que reciben el nombre de **Teorema de Thales**, ambos atribuidos al matemático griego Thales de Mileto en el siglo VI a. C.



Thales de Mileto.

Primer Teorema de Thales

Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes, es decir, que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C' semejante a ABC**.

Es decir, cuyos ángulos son iguales y cuyos lados son propor**cionales** a los del **triángulo ABC**.

Lo que se traduce en la fórmula

B=B' y C=C'

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

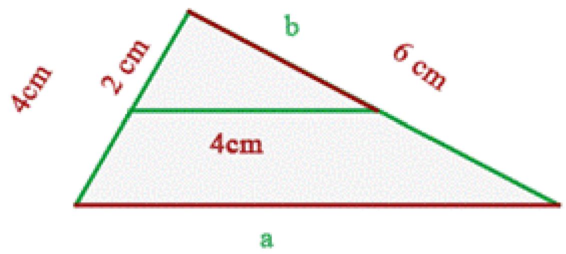
Hagamos un ejercicio como ejemplo:

En el triángulo de la derecha, hallar las medidas de los segmentos **a** y **b**.

Aplicamos la fórmula, y tenemos

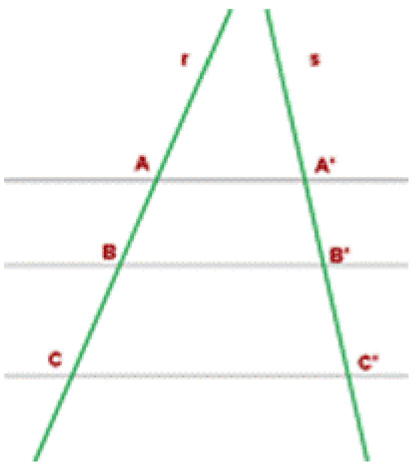
$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4} \qquad a = 8\ \text{cm}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b} \qquad b = 3\ \text{cm}$$



Como vemos, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.

Del primer teorema de Thales se deduce además lo siguiente (realmente es otra variante de dicho teorema, y, a su vez, consecuencia del mismo): ***Si las rectas a, b, c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales*.**



Del primer teorema de Tales se deduce además lo siguiente (realmente es otra variante de dicho teorema, y, a su vez, consecuencia del mismo):

Si dos rectas cualesquieras (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (A'B', B'C').

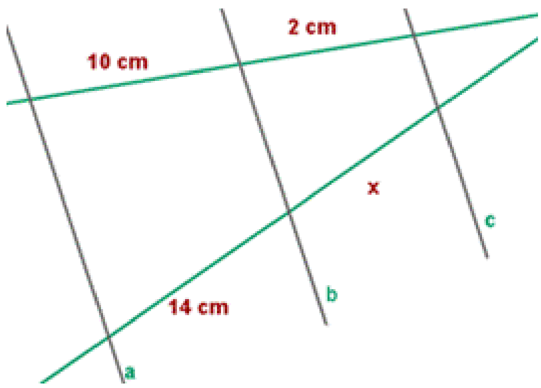
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejercicios

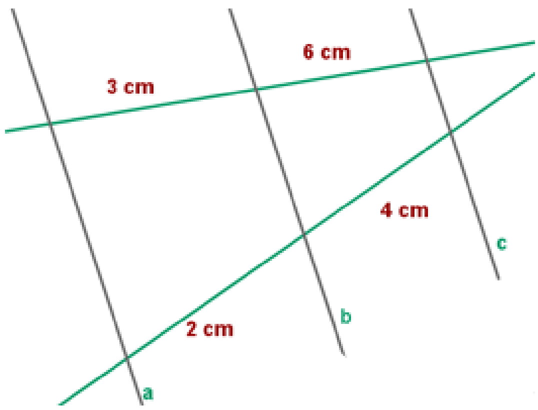
1. Las rectas a, b y c son paralelas. Hallar la longitud de x.

$$\frac{14}{10} = \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{14 \cdot 2}{10} = 2{,}8 \text{ cm}$$



2. Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?



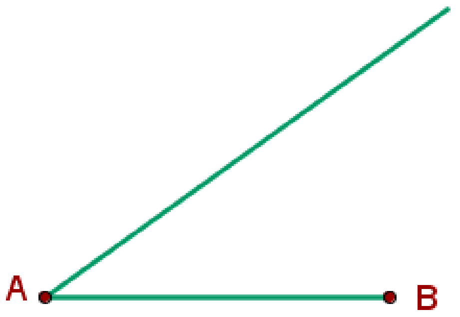
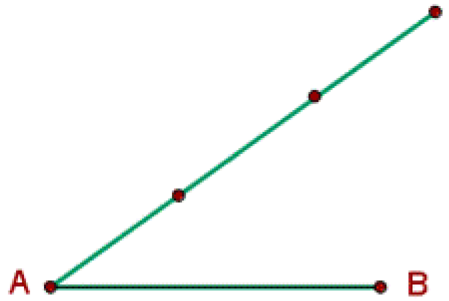
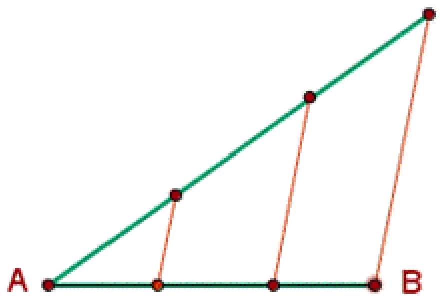
Sí, porque se cumple el **teorema de Thales**.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad 12 = 12$$

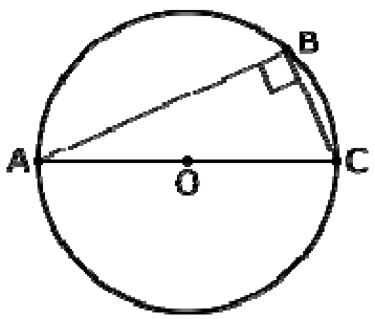
Una aplicación inmediata de este teorema sería la división de un segmento en partes iguales (así se gradúa una cinta métrica), o en partes proporcionales a números dados (con ayuda de compás, regla y escuadra o cartabón).

Ejemplo

Dividir el segmento AB en 3 partes iguales

	1. Se dibuja una semirrecta de origen el extremo A del segmento.
	2. Tomando como unidad cualquier medida, se señalan en la semirrecta 3 unidades de medida a partir de A.
	3. Por cada una de las divisiones de la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento que une B con la última división sobre la semirrecta. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que se divide.

Segundo teorema



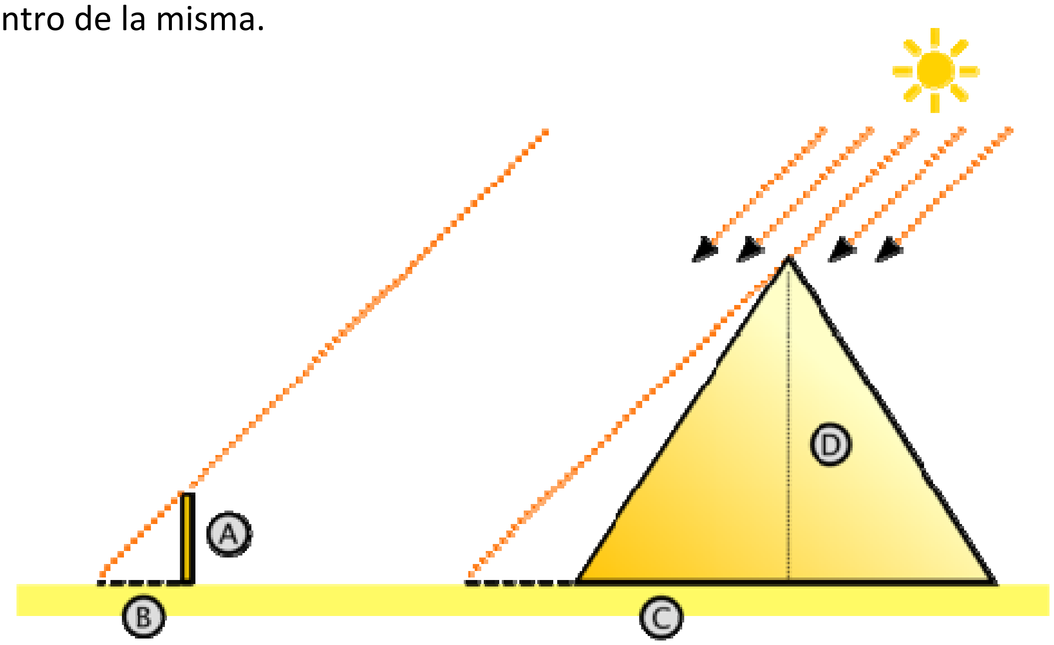
El segundo teorema de Thales de Mileto es un teorema de geometría particularmente enfocado a los triángulos rectángulos, las circunferencias y los ángulos inscritos, consiste en el siguiente enunciado:

Segundo Teorema de Thales:

Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. Entonces el triángulo ABC, es un triángulo rectángulo.

Leyenda

Según la leyenda (relatada por Plutarco[1]), Tales de Mileto en un viaje a Egipto, visitó las pirámides de Guiza (*conocidas como Keops, Kefrén y Micerino*), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber su altura. De acuerdo a la leyenda, trató este problema con semejanza de triángulos (*y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos*), pudo establecer una relación de semejanza (***teorema primero** de* Tales) entre dos triángulos rectángulos, por un lado el que tiene por catetos (***C*** y ***D***) a la longitud de la sombra de la pirámide (*conocible*) y la longitud de su altura (*desconocida*), y por otro lado, valiéndose de una vara (*clavada en el suelo de modo perfectamente vertical*) cuyos catetos conocibles (***A*** y ***B***) son, la longitud de la vara y la longitud de su sombra. Realizando las mediciones en una hora del día en que la sombra de la vara sea perpendicular a la base de la cara desde la cual medía la sombra de la pirámide y agregando a su sombra la mitad de la longitud de una de las caras, obtenía la longitud total ***C*** de la sombra de la pirámide hasta el centro de la misma.

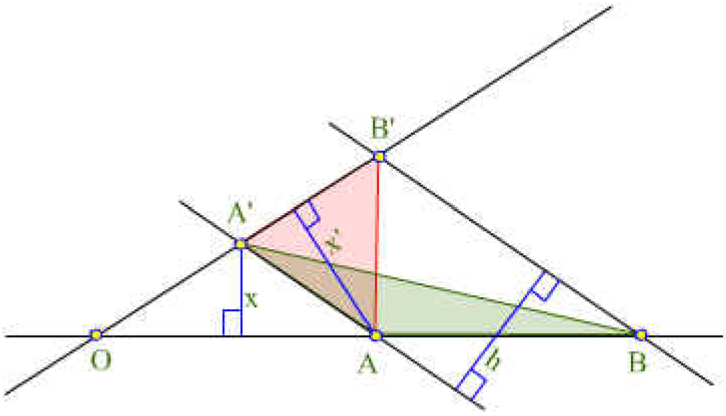


Como en triángulos semejantes, se cumple que $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$,

por lo tanto la altura de la pirámide es $D = \frac{AC}{B}$,

con lo cual resolvió el problema.

Los triángulos AA'B y AA'B' tienen igual área porque comparten una base (AA') y su altura correspondiente (h).



Como también se cumple:

área de AA'B = $\frac{AB \cdot x}{2}$

área de AA'B' = $\frac{A'B' \cdot x'}{2}$

En consecuencia, $\frac{AB \cdot x}{2} = \frac{A'B' \cdot x'}{2}$, de donde $\frac{x}{x'} = \frac{A'B'}{AB}$ **(1)**

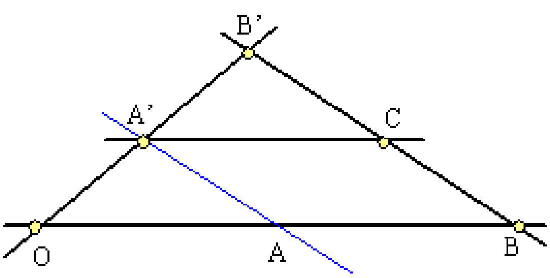
De otra parte tenemos que, si expresamos el área de OAA' tomando como base OA, el área de este triángulo es $\frac{OA \cdot x}{2}$ y, si tomamos como base OA', también será $\frac{OA' \cdot x'}{2}$. Igualando las dos últimas expresiones y operando, tendremos que $\frac{x}{x'} = \frac{OA'}{OA}$ **(2)**

Mirando las igualdades (1) y (2) concluimos que $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$ que es lo que afirma el teorema de Tales.

CONSECUENCIAS:

1. Por las propiedades de las proporciones $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA' + A'B'}{OA + AB}$

como se cumple que OA'+A'B' = OB' y OA+AB = OB, tendremos que $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}$

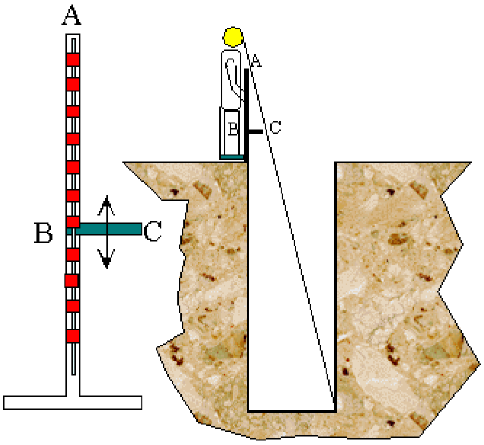


2. Si trazamos una paralela por A' a la recta OB y aplicamos el último resultado tomando como vértice a B' en lugar de O:

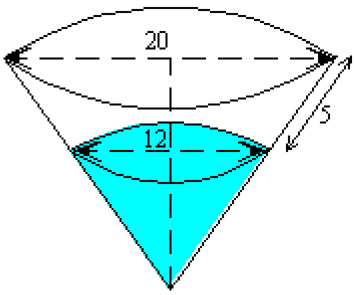
$$\frac{B'O}{B'B} = \frac{A'O}{CB}$$

y como CB = A'A, tenemos que $\frac{OB'}{BB'} = \frac{OA'}{AA'}$

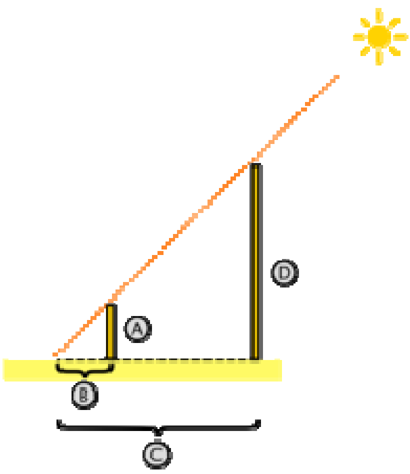
OTRAS APLICACIONES DEL TEOREMADE THALES:
Realización de medidas indirectas, cálculo geométrico de reglas de tres, trabajo con conos, realización de cambios de unidades, etc.



¿Cómo se puede medir la profundidad del pozo usando el Teorema de Thales?

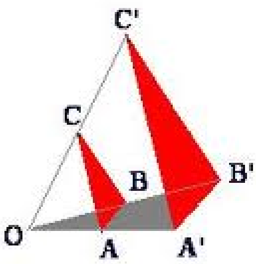


¿Qué parte del volumen total de la copa está ocupado con líquido?



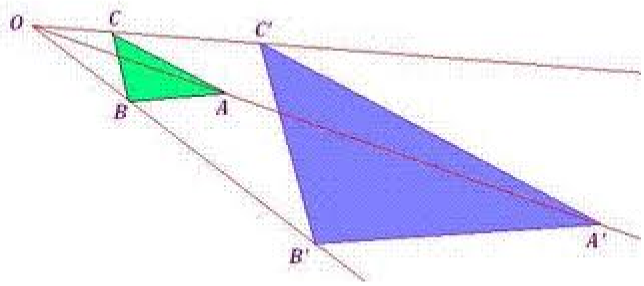
Cálculo de alturas de edificios.

Construye a partir de una regla con escala en centímetros otra regla que te sirva para medir pulgadas (1 pulgada=2’54 cm.)



F. 8

Homotecias



Resuelve geométricamente el siguiente problema: en una clase de 45 alumnos han suspendido 18, ¿qué porcentaje es?

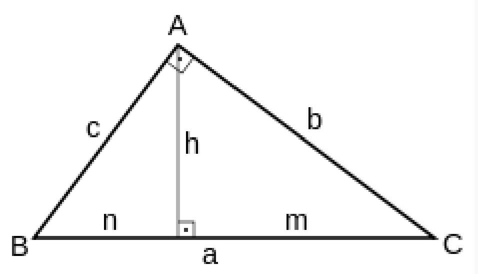
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Las **relaciones métricas en el triángulo rectángulo** son aquellas que tratan las relaciones entre las longitudes de los lados del triángulo, entre las cuales se destaca el **Teorema de Pitágoras** (que es válido exclusivamente en el triángulo rectángulo) y se aplican sobre las dimensiones de los catetos, de la hipotenusa, de la altura relativa a la hipotenusa y de los segmentos determinados sobre ésta como proyecciones de los catetos de triángulo.

Triángulo rectángulo es el que tiene uno de sus ángulos es recto, es decir, de 90°. Las relaciones métricas del triángulo rectángulo son cuatro. Y **se deducen del hecho de que los tres triángulos formados al trazar la altura relativa a la hipotenusa son rectángulos y semejantes entre sí** (Teorema de Thales)

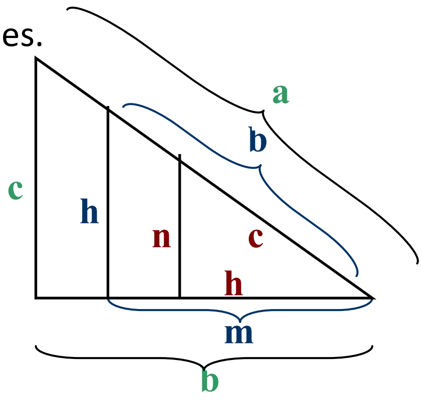
Denotaremos así a los principales elementos del triángulo rectángulo:

a **es la hipotenusa,**
b **el cateto mayor,**
c **el cateto menor,**
h **la altura relativa a la hipotenusa,**
m **la proyección del cateto *b* y**
n **la proyección del cateto *c*.**



- La hipotenusa es igual a la suma de las proyecciones.

$$a = m + n$$



Por semejanza de triángulos, tenemos que:

- **TEOREMA DE LA ALTURA:** El cuadrado de la altura el igual al producto de las proyecciones de los catetos.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn$$

- **TEOREMA DE LOS CATETOS**: El cuadrado de un cateto, es igual al producto entre su proyección (que se encuentra de su lado) y la hipotenusa.

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = am$$

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = an$$

- **TEOREMA DE PITÁGORAS**: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Sumando, miembro a miembro, los teoremas de los catetos, tenemos que $b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a^2$.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

TEOREMAS MÉTRICOS

Teorema de la altura

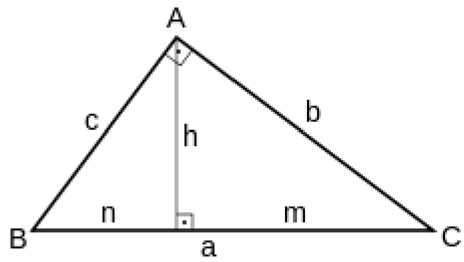
El teorema de "**la altura de un triángulo rectángulo**" establece que:

Teorema de la altura (*forma* 1)

En cualquier triángulo **rectángulo** la altura relativa a la hipotenusa es la media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.

Demostración

La altura del triángulo **rectángulo** ABC (véase ***Figura***) lo divide en dos triángulos rectángulos semejantes, de forma que



$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por hn se tiene:

$$h^2 = mn \quad \text{por lo que} \quad h = \sqrt{mn} \quad (1)$$

Otra forma del mismo teorema

La altura ***h*** correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo (véase ***Figura***) también puede obtenerse reemplazando a los valores ***m*** y ***n*** de la ecuación (1) del presente teorema por sus respectivos equivalentes dados por el teorema del cateto.

$$m = \frac{b^2}{a} \quad ; \quad n = \frac{c^2}{a} \qquad h = \sqrt{mn} = \sqrt{\frac{b^2}{a}\frac{c^2}{a}}$$

lo que al simplificar en el último término de la ecuación la raíz con los cuadrados nos conduce a :

$$h = \frac{b\,c}{a}$$

Donde ***h*** es la altura (*relativa a la hipotenusa*), ***b*** y ***c*** los catetos y ***a*** la hipotenusa.

Teorema de la altura (*forma* 2)

En todo triángulo rectángulo la altura ***h*** (*relativa a la hipotenusa*) es igual al producto de sus catetos ***b*** y ***c*** divididos por la hipotenusa ***a***.

Teorema de los catetos

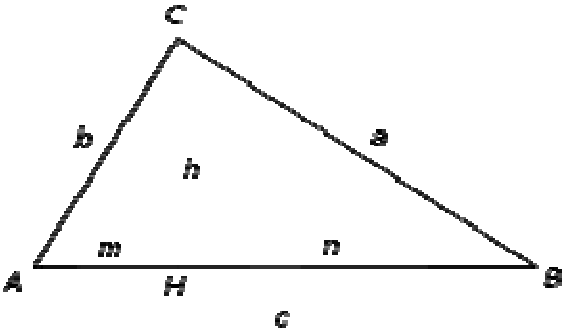
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

Este teorema puede expresarse matemáticamente —*para cada uno de sus dos catetos*— como:

$$b^2 = c\,m$$

$$a^2 = c\,n$$

Donde **m** y **n** son, respectivamente, las *proyecciones* de los catetos **b** y **a** sobre la hipotenusa **c**.

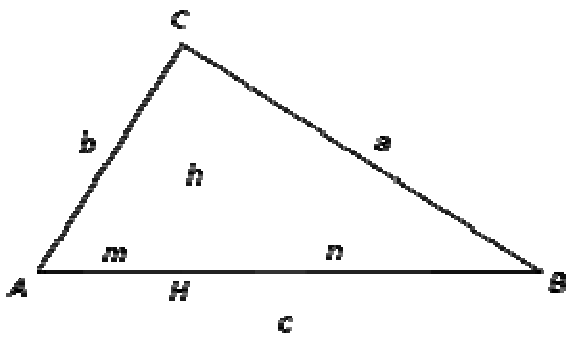


Demostración

Sea el triángulo **ΔABC** rectángulo en **C**, dispuesto de modo que su base es la hipotenusa **c**. La altura **h** determina los segmentos **m** y **n**, que son, respectivamente, las *proyecciones* de los catetos **b** y **a** sobre la hipotenusa.

Los triángulos rectángulos **ΔABC**, **ΔACH** y **ΔBCH** tienen iguales sus ángulos, y por lo tanto son semejantes:

1. Todos tienen un ángulo recto.
2. Los ángulos **B** y **ACH** son iguales por ser agudos, por abarcar un mismo arco, y tener sus lados perpendiculares.
3. Igualmente sucede con los ángulos **A** y **BCH**.



Puesto que en las figuras semejantes los lados homólogos son proporcionales, tendremos que:

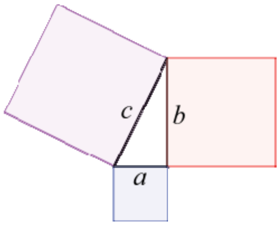
- Por la semejanza entre los triángulos **ΔACH** y **ΔABC**
- $$\frac{b}{m} = \frac{c}{b}$$

de dónde, $b^2 = cm$

Por la semejanza entre los triángulos **ΔBCH** y **ΔABC ,** $\frac{a}{n} = \frac{c}{a}$, $a^2 = cn$

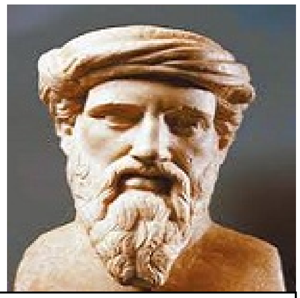
y el teorema queda demostrado.

Teorema de Pitágoras



En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

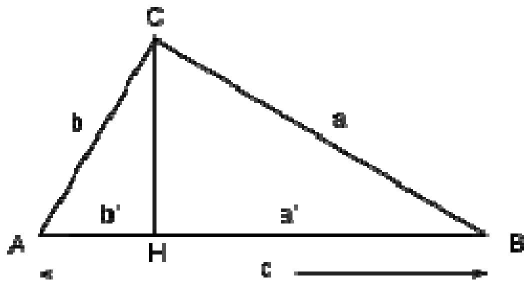
$$a^2 + b^2 = c^2$$

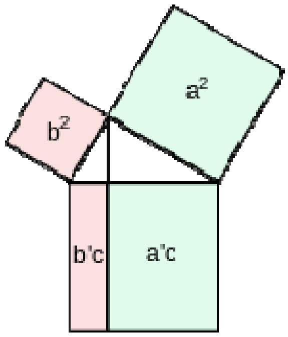


Pitágoras de Samos

Demostración

Se cree que Pitágoras se basó en la semejanza de los triángulos ABC, AHC y BHC. La figura coloreada hace evidente el cumplimiento del teorema.





Se estima que se demostró el teorema mediante semejanza de triángulos: sus lados homólogos son proporcionales.

Sea el triángulo ABC, rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que determina los segmentos *a'* y *b'*, proyecciones en ella de los catetos *a* y *b*, respectivamente.

Los triángulos rectángulos ABC, AHC y BHC tienen sus tres bases iguales: todos tienen dos bases en común, y los ángulos agudos son iguales bien por ser comunes, bien por tener sus lados perpendiculares. En consecuencia dichos triángulos son semejantes.

- De la semejanza entre ABC y AHC:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \rightarrow \quad b^2 = b'c$$

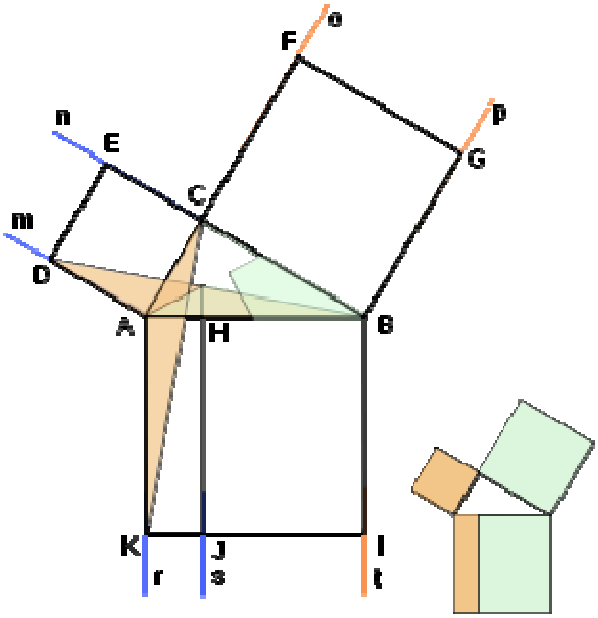
- De la semejanza entre ABC y BHC:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \rightarrow \quad a^2 = a'c$$

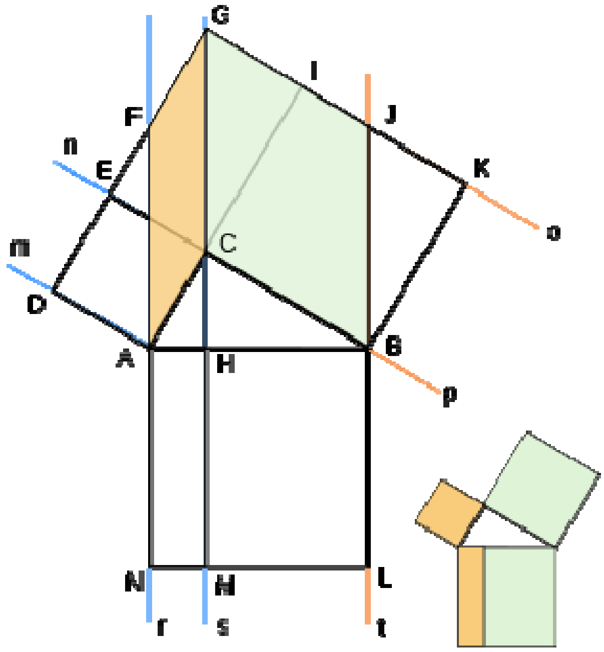
Los resultados obtenidos son el teorema del cateto. Sumando:

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b')$$

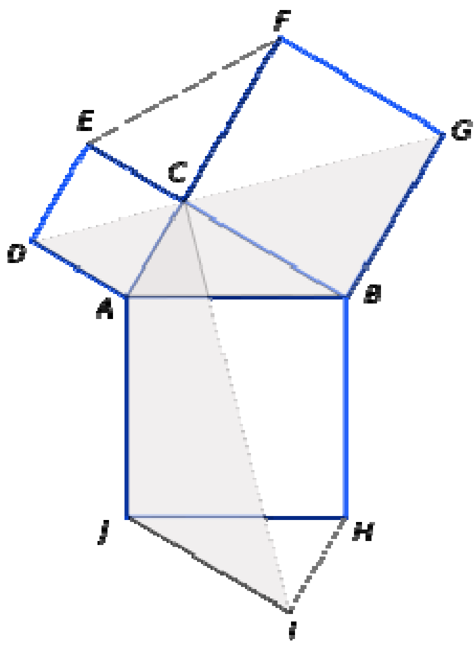
Pero $(a' + b') = c$, por lo que finalmente resulta: $a^2 + b^2 = c^2$



Demostración de Euclides:
La demostración de Euclides es puramente geométrica. Su columna vertebral es la sencilla proposición I.41 de Los Elementos.

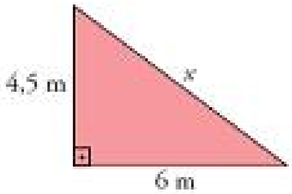


La demostración de Pappus parece ser una variación sobre un mismo tema, la demostración de Euclides.



El diseño inicial, con el triángulo y los cuadrados de catetos e hipotenusa, es modificado por **Leonardo da Vinci** al añadir dos triángulos iguales al ABC: el ECF y el HIJ. Preciosa demostración que se basa en la igualdad de los cuadriláteros ACJI y DABG.

En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m; en otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?



$x^2 = 4,5^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 20,25 + 36 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 56,25 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{56,25} = 7,5$ m

Perímetro = 7,5 + 4,5 + 6 = 18 m

$7,5^2 = y^2 + 7,2^2 \rightarrow 56,25 = y^2 + 51,84 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 = 56,25 - 51,84$

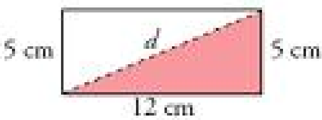
$y^2 = 4,41 \rightarrow y = \sqrt{4,41} = 2,1$ m

Perímetro = 7,5 + 7,2 + 2,1 = 16,8 m

El primero tiene mayor perímetro.

La diagonal de un rectángulo de lados 5 cm y 12 cm es igual al lado de un cuadrado. ¿Cuánto mide la diagonal de ese cuadrado?

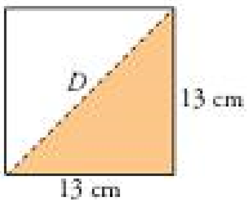
- Hallamos la longitud de la diagonal del rectángulo:



$d^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 144 + 25 = 169 \rightarrow$

$\rightarrow d = \sqrt{169} = 13$ cm

- Hallamos la longitud de la diagonal del cuadrado:

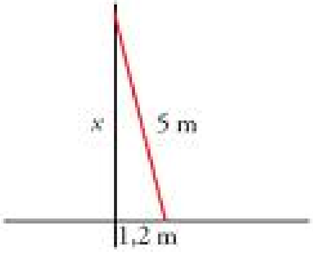


$D^2 = 13^2 + 13^2 \rightarrow D^2 = 169 + 169 = 338$

$D = \sqrt{338} \simeq 18,38$ cm

Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de la misma. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?

Llamamos x a la altura que alcanza:

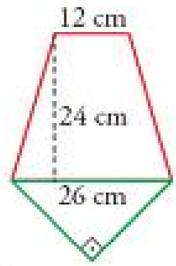


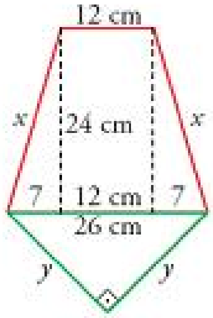
$5^2 = x^2 + 1,2^2 \rightarrow 25 = x^2 + 1,44 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 25 - 1,44 = 23,56$

$x = \sqrt{23,56} \simeq 4,85$

Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.





Hallamos x e y:

$x^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 576 + 49 = 625 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{625} = 25$ cm

$26^2 = y^2 + y^2 \rightarrow 676 = 2y^2 \rightarrow y^2 = \dfrac{676}{2} = 338$

$y = \sqrt{338} = 18,38$

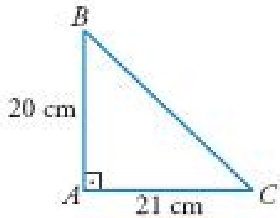
- El perímetro será:

  $P = 12 + 2x + 2y = 12 + 50 + 36,76 = 98,76$ cm

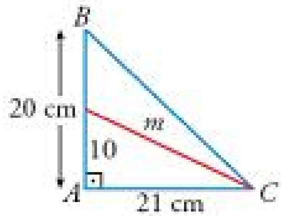
a) Dibuja la mediana que sale de C y halla su longitud.

b) Dibuja las mediatrices y halla el radio de la circunferencia circunscrita.

c) ¿Cuál es el ortocentro de ese triángulo?



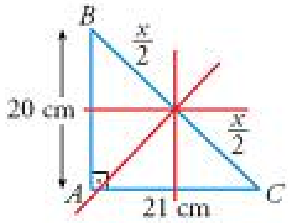
a)



$m^2 = 21^2 + 10^2 \rightarrow m^2 = 441 + 100 = 541$

$m = \sqrt{541} \approx 23,26 \rightarrow m \approx 23,26$

b)



Las mediatrices se cortan en el circuncentro; que, en este caso, es el punto medio de la hipotenusa.

Llamamos x a la longitud de la hipotenusa:

$x^2 = 20^2 + 21^2 \rightarrow x^2 = 400 + 441 = 841 \rightarrow x = \sqrt{841} = 29 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{29}{2} = 14,5$

El radio de la circunferencia circunscrita mide 14,5.

c) El vértice A (el vértice opuesto a la hipotenusa).

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Actividad 1: Conocidos los catetos: a=4 cm. y b=5 cm., calcular la hipotenusa, c.

Actividad 2: Conocido un cateto a=5 cm. y la hipotenusa c=8 cm., calcular el otro cateto, b.

Actividad 3: El tamaño de las pantallas de televisión viene dado por la longitud en pulgadas de la diagonal de la pantalla (una pulgada equivale a 2,54 cm). Si un televisor mide 34,5 cm de base y 30 cm de altura, ¿cuál será su tamaño?

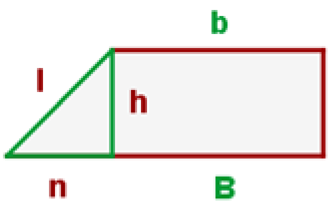
Actividad 4: Halla la altura de un triángulo equilatero de 4 cm. de lado.

Actividad 5: Halla la altura de un triángulo isósceles cuyos lados miden c=5 cm. y a=b=4 cm.

Actividad 6: Calcular el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio.

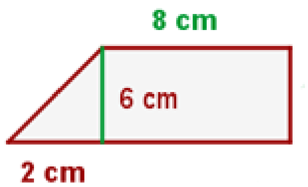
Actividad 7: Calcular los elementos pedidos de las siguientes figuras:

Lado oblicuo del trapecio rectángulo



$$n = B - b$$

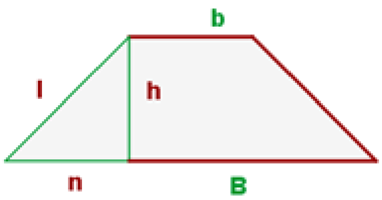
$$l = \sqrt{h^2 + n^2}$$



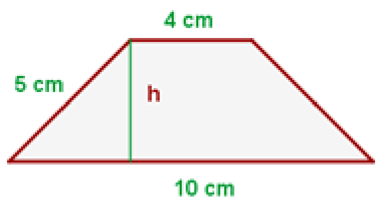
$$l^2 = 6^2 + 2^2$$

$$l = \sqrt{40} = 6.32 \text{ cm}$$

Altura del trapecio isósceles

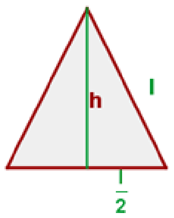


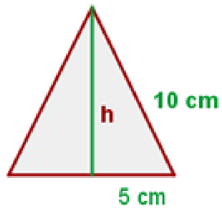
$$h = \sqrt{l^2 - n^2}$$



$$5^2 = h^2 + 3^2 \qquad h = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

Altura del triángulo equilátero





$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

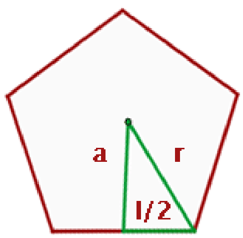
$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$10^2 = h^2 + 5^2$$

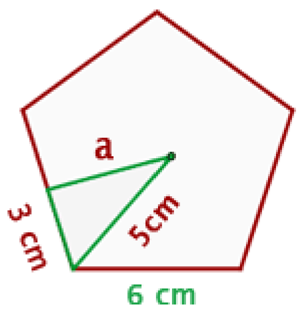
$$h = \sqrt{100 - 25} = 8.66 \text{ cm}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

Apotema de un polígono regular



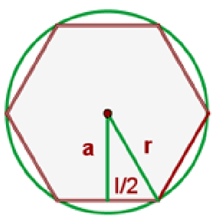
$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



$$5^2 = a^2 + 3^2$$

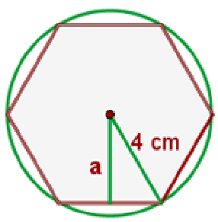
$$a = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

Apotema del hexágono inscrito



$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$l = r$$



$$l = r = 4$$

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3.46 \text{ cm}$$

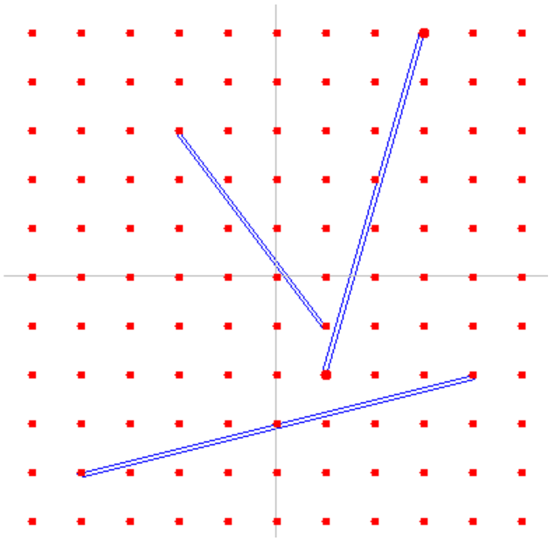
-Usos del teorema de Pitágoras para:

- Determinar si un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.
- Determinar el lado desconocido de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos.

AMPLIACIONES

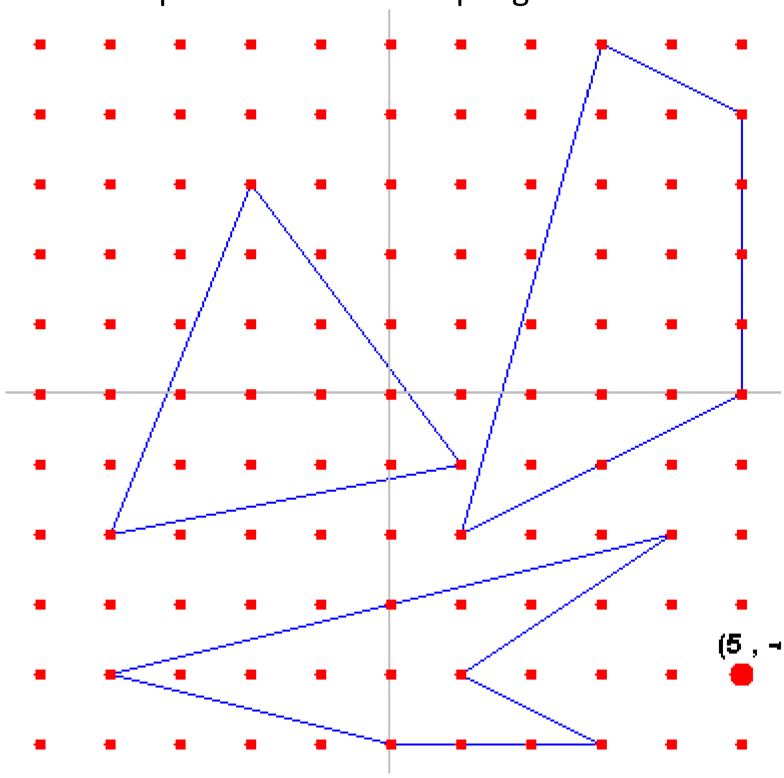
- Realizar medidas exactas de segmentos con extremos definidos en las intersecciones de una trama cuadrada. Se toma como unidad el lado de los cuadrados de la trama.

  Calcula la longitud de los siguientes segmentos:



- Determinación de perímetros de figuras poligonales definidas en una trama cuadrada.

  Calcula el perímetro de estos polígonos.

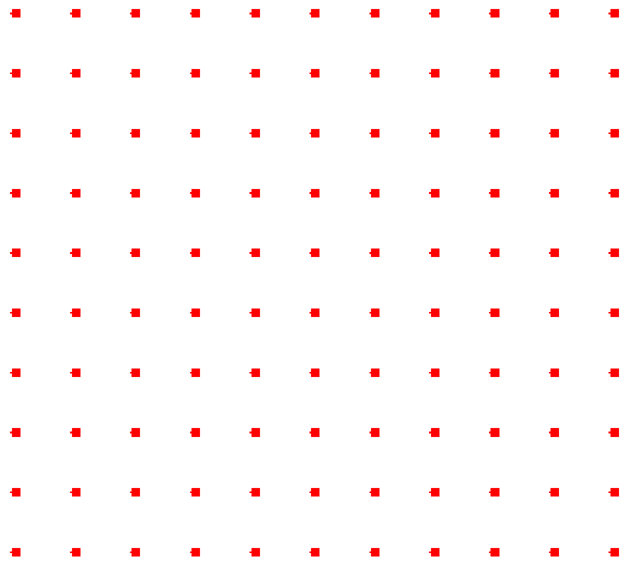


- Dados dos lados de un triángulo determinar todas las posibilidades de medida del tercero para que el triángulo sea rectángulo.

  EJERCICIO: Determina el tercer lado de un triángulo rectángulo sabiendo que los otros dos miden 5 cm y 8 cm.

- Dibujar segmentos cuya medida venga dada por la raíz cuadrada de un número.

  Dibuja en esta cuadrícula un segmento que mida la raíz cuadrada de 17 y la raíz cuadrada de 20 (de dos formas distintas)



- Determinación de perímetros de cuadriláteros cuyas diagonales son perpendiculares y de medidas conocidas.