CÓNICAS

1. Demuestra que la recta r de ecuación 3x+4y-25 = 0 es tangente a la circunferencia C: $x^2+y^2 = 25$.

2. El afelio de la órbita elíptica que describe la Luna alrededor de la Tierra es de 400.491 km y el perihelio de 349.632 km. Con estos datos calcula la excentricidad de dicha órbita e interprétala. Si el perihelio se alcanza a una distancia que es 55 veces el radio de la Tierra calcula dicho radio.

3. Describe la siguiente cónica: $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$. Obtén sus elementos y dibújala.

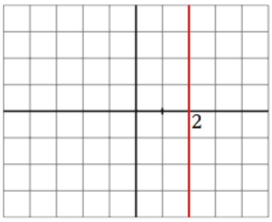
4. La parábola $y^2-4y-6x-5 = 0$ tiene por foco el punto (0,2). Encuentra su directriz.

COMPLEJOS

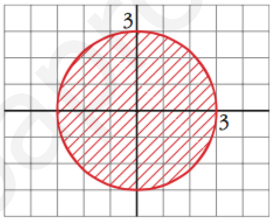
5. Determina k para que el cociente $\frac{k-2i}{k+i}$ sea a) real, b) imaginario puro.

6. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en las regiones representadas en los siguientes casos:

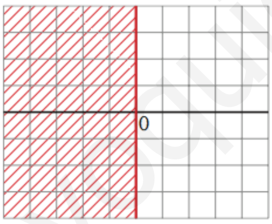
a)



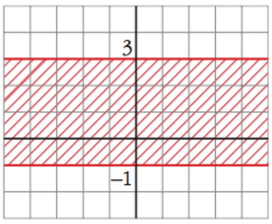
b)



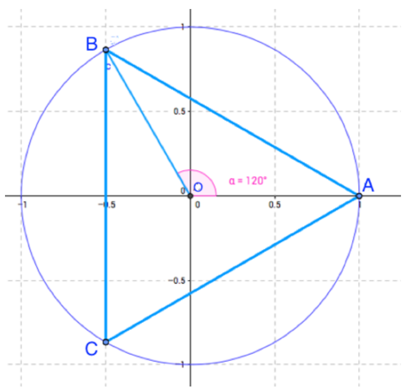
c)



d)



7. Con la información de la figura, calcula las coordenadas de todos los vértices del triángulo equilátero con centro el origen que aparecen en ella (*considera los valores correspondientes al complejo cuyo afijo es el punto A*).



8. Obtén las cuatro soluciones de la ecuación $z^4+16 = 0$ e indica que representan los afijos de sus soluciones.

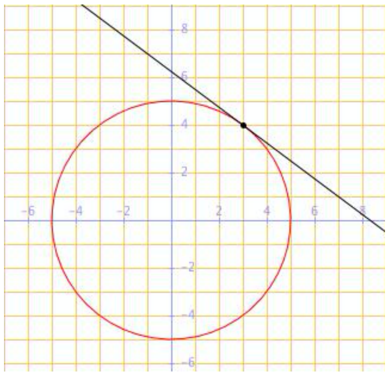
CÓNICAS

1. Demuestra que la recta r de ecuación 3x+4y-25 = 0 es tangente a la circunferencia C: $x^2+y^2 = 25$.

Solución:
Para comprobar que r es tangente al circunferencia en el punto A se comprueba que el punto de corte de ambas es único.
$3x+4y-25 = 0 \Rightarrow y = \frac{25-3x}{4}$

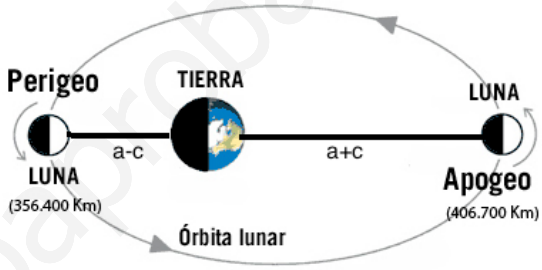
sustituyendo:
$x^2+\left(\frac{25-3x}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2-6x+9 = 0 \Rightarrow x = 3$

que es única, por lo tanto r es tangente a C en el punto A = (3, 4).



2. El afelio de la órbita elíptica que describe la Luna alrededor de la Tierra es de 400.491 km y el perihelio de 349.632 km. Con estos datos calcula la excentricidad de dicha órbita e interprétala. Si el perihelio se alcanza a una distancia que es 55 veces el radio de la Tierra calcula dicho radio.

Solución:
Al ocupar la Tierra uno de los focos las distancias mínima y máxima de la Luna a la Tierral son a-c y a+c respectivamente. Con los datos del problema obtenemos el sistema:
$$\begin{cases} a + c = 400.491 \\ a - c = 349.632 \end{cases}$$



Restando ambas ecuaciones obtenemos la distancia focal:
2c = 50.859
por lo tanto la semidistancia focal es c = 25.430 km

Sumando ambas ecuaciones obtenemos el eje mayor:
2a = 750.114
por lo tanto el semieje mayor es a = 375.057 km

La excentricidad se obtiene mediante la relación $e = \frac{c}{a} = \frac{25.430}{375.057} = 0{,}068$ luego es casi una circunferencia.

Para hallar el radio de la Tierra dividimos el perihelio por 55 obteniendo:
$R = \frac{a-c}{55} = \frac{349.632}{55} = 6357$ km.

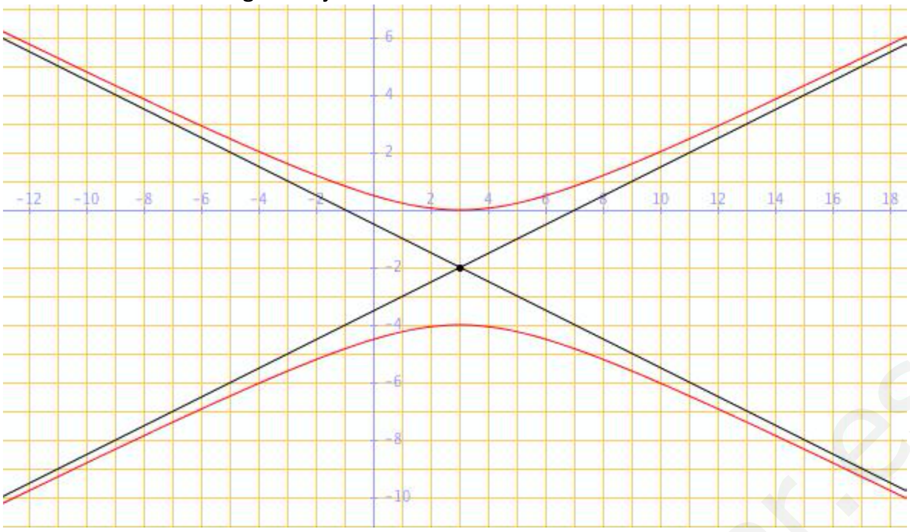
3. Describe la siguiente cónica: $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$. Obtén sus elementos y dibújala.

Solución:
Es una hipérbola horizontal centrada en P (3, -2), observando la ecuación obtenemos que:
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$
$c^2 = a^2+b^2 = 16+4 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
Los focos son $F(3, -2+2\sqrt{5})$ y $F'(3, -2-2\sqrt{5})$
Los vértices son: V(3, -2+2) = V(3,0) y V'(3, -2-2) = V'(3, -4)
La excentricidad es: $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

Las asíntotas son:
$y-P_2 = \frac{b}{a}(x-P_1) \Rightarrow y+2 = \frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = 0{,}5x-3{,}5$

$y-P_2 = -\frac{b}{a}(x-P_1) \Rightarrow y+2 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -0{,}5x-0{,}5$

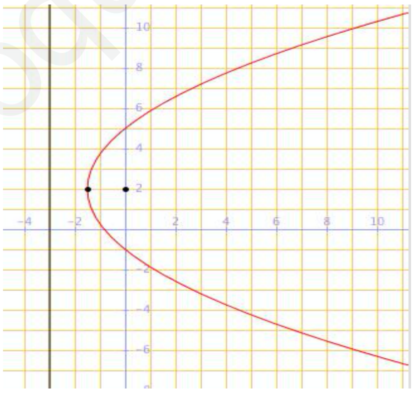
La gráfica de cónica es la de la figura adjunta:



4. La parábola $y^2-4y-6x-5 = 0$ tiene por foco el punto (0,2). Encuentra su directriz.

Solución:
$y^2-4y-6x-5 = 0 \Rightarrow y^2-4y+4= 6x+9$
Utilizando el cuadrado de la suma y sacando 6 factor común:
$(y-2)^2 = 6\left(x+\frac{3}{2}\right)$
Por lo tanto $2p = 6 \Rightarrow p = 3$.

El vértice de la parábola es = $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$
Como el foco es F(0, 2) y $\frac{p}{2}$ es la distancia entre el vértice y el foco entonces la directriz es
$x = -\frac{3}{2}-\frac{3}{2} = -3$.



COMPLEJOS

5. Determina k para que el cociente $\frac{k-2i}{k+i}$ sea a) real, b) imaginario puro.

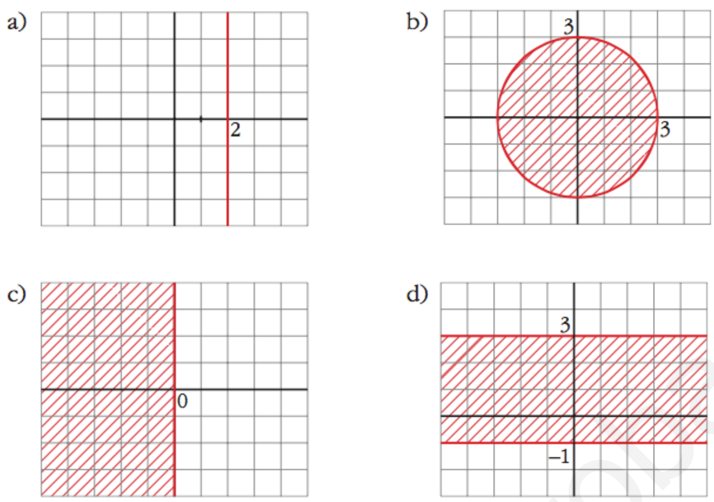
Solución:
Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:
$$\frac{k-2i}{k+i} = \frac{(k-2i).(k-i)}{(k+i)(k-i)} = \frac{k^2-ki-2ki+2i^2}{k^2-i^2} = \frac{k^2-2}{k^2+1} - \frac{3k}{k^2+1}\,i$$

a) Para que el cociente sea un número real su parte imaginaria debe ser nula:
$\frac{3k}{k^2+1} = 0 \Rightarrow k = 0$

b) Para que sea imaginario puro ha de tener parte real nula:

$\frac{k^2-2}{k^2+1} = 0 \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$

6. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en las regiones representadas en los siguientes casos:



Solución:

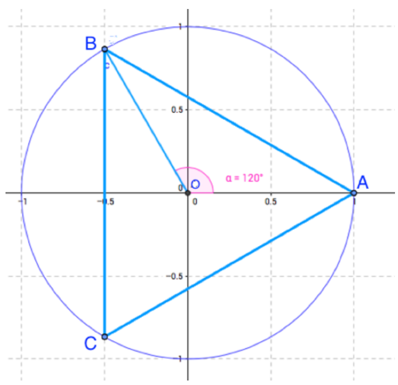
a) Re z = 2

b) |z| ≤ 3

c) Re z ≤ 0

d) -1 ≤ Im z ≤ 3

7. Con la información de la figura, calcula las coordenadas de todos los vértices del triángulo equilátero con centro el origen que aparecen en ella (*considera los valores correspondientes al complejo cuyo afijo es el punto A*).



Solución:

Si el vértice A corresponde al afijo del complejo $z_A = 1$, para obtener los demás se realizan giros horarios de centro el origen y ángulo:

$\frac{360°}{3} = 120°$

es decir hallamos los número multiplicando z_A por $1_{120°}$

Pasamos z_A a forma polar hallando módulo y argumento:

$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{0}{1}\right) = 0°$

Por lo tanto:

$z_B = z_A.1_{120°} = 1_{120°} = 1(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_c = z_A.1_{240°} = 1_{240°} = 1(\cos 240° + i \text{ sen } 240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Luego las coordenadas de los tres vértices son:

$A = (1,0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. Obtén las cuatro soluciones de la ecuación $z^4+16 = 0$ e indica que representan los afijos de sus soluciones.

Solución:
Despejando en la ecuación y resolviendo y pasando las soluciones a forma polar obtenemos:

$z^4 = -16 \Rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ+360^\circ K)/4} = 2_{45^\circ+90^\circ K}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$z_1 = 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$z_2 = 2_{45^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$z_3 = 2_{45^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$z_4 = 2_{45^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

Los afijos de sus soluciones representan los vértices de una cuadrado centrado en el origen y de lado 2, al como se ve en la figura adjunta.