

## EXAMEN GEOMETRÍA ANALÍTICA

- 1) Un segmento tiene por extremos A(-1, 6) y B(9, 0). Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en cuatro partes iguales.

$$\overline{AB} = (10, -6)$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{AB} = (-1, 6) + \frac{1}{4}(10, -6) = (-1, 6) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

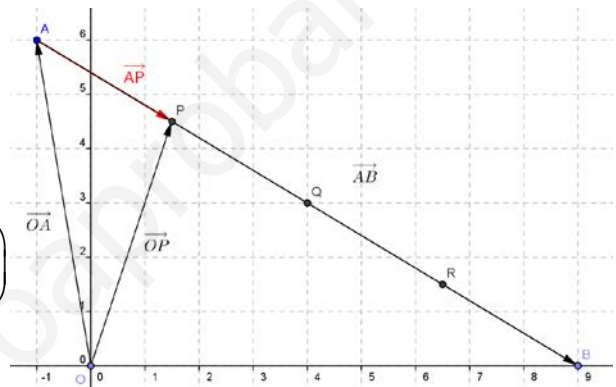
$$P = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{AP} = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) = (4, 3)$$

$$Q = (4, 3)$$

$$\overline{OR} = \overline{OQ} + \overline{AP} = (4, 3) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$R = \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right)$$



- 2) Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas A (1, 7), B (-3, 4), C (k, 5) estén alineados.

$$\overline{AB} \parallel \overline{BC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (-4, -3) \\ \overline{BC} = (k+3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{coordenadas} \\ \text{proporcionales} \end{array} \right) \Rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \Rightarrow -4 = -3k - 9 \Rightarrow 3k = -5 \Rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

- 3) Halla las ecuaciones, vectorial, paramétrica, continua y general de la recta que pasa por el punto P(3, -1) y Q(7, 5).

$$\overline{PQ} = (4, 6)$$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (3, -1) + \lambda(4, 6) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:  $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{6}$

$$6x - 18 = 4y + 4$$

Ecuación general:

$$6x - 4y - 22 = 0$$

$$\boxed{3x - 2y - 11 = 0}$$

4) Calcula el simétrico del punto  $A = (4, 3)$  respecto de la recta  $r : 3x - 2y - 13 = 0$

**1ª FORMA** Sea  $B(a, b)$  el simétrico:

- Recta,  $s$ , perpendicular a  $r$  que pasa por  $A$ .

$$s : 2x + 3y + C = 0$$

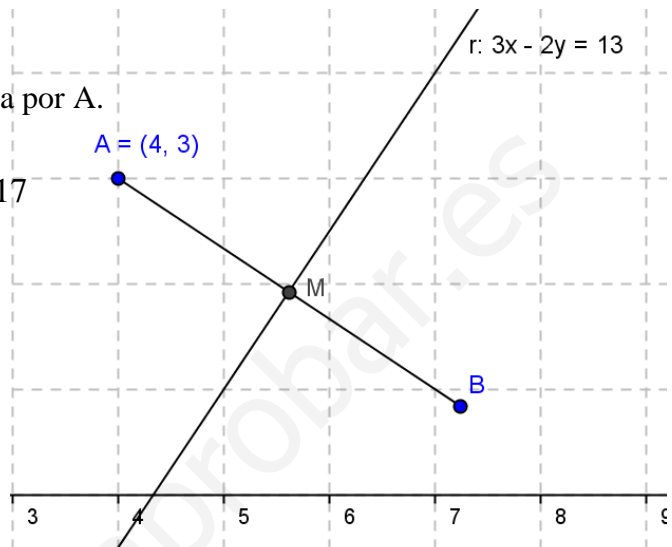
$$(pasa por A) \rightarrow 8 + 9 + C = 0 \rightarrow C = -17$$

$$s : 2x + 3y - 17 = 0$$

- $M$  es el punto de corte de  $r$  y  $s$ .

$$\begin{cases} r : 3x - 2y - 13 = 0 \\ s : 2x + 3y - 17 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Resolviendo}$$

$$x = \frac{73}{13}; y = \frac{25}{13} \Rightarrow M \left( \frac{73}{13}, \frac{25}{13} \right)$$



Por lo tanto:

$$M \left( \frac{73}{13}, \frac{25}{13} \right) = \left( \frac{4+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} 146 = 52 + 13a \Rightarrow 94 = 13a \Rightarrow a = \frac{94}{13} \\ 50 = 39 + 13b \Rightarrow 11 = 13b \Rightarrow b = \frac{11}{13} \end{cases}$$

Así que  $B = \left( \frac{94}{13}, \frac{11}{13} \right)$

**2ª FORMA**

Para calcular el simétrico,  $B = (a, b)$ , se ha de cumplir que  $\begin{cases} B \in s \\ d(A, r) = d(B, r) \end{cases}$

- Recta  $s$ , perpendicular a  $r$  que pasa por  $A$ :

$$s : 2x + 3y + C = 0 \Rightarrow 8 + 9 + C = 0 \Rightarrow C = -17$$

pasa  
por A

$$s : 2x + 3y - 17 = 0$$

- $B \in s \Rightarrow \boxed{2a + 3b - 17 = 0}$

- $d(A, r) = d(B, r)$

$$d(A, r) = \frac{|12 - 6 - 13|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{|3a - 2b - 13|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow |3a - 2b - 13| = 7 \Rightarrow$$

$$d(B, r) = \frac{|3a - 2b - 13|}{\sqrt{9 + 4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{3a - 2b - 13 = 7}$$

- Resolvemos el sistema para hallar  $a$  y  $b$

$$\begin{cases} 2a + 3b - 17 = 0 \\ 3a - 2b - 13 = 7 \end{cases} \Rightarrow (\text{resolviendo}) \Rightarrow a = \frac{94}{13}, b = \frac{11}{13}$$

$$\boxed{B\left(\frac{94}{13}, \frac{11}{13}\right)}$$

5) Calcula  $a$  para que las rectas  $r: 2x - y - 4 = 0$  y  $s: ax + 3y + 2 = 0$ :

- a) Sean perpendiculares      b) Formen un ángulo de  $45^\circ$ .

a)

$$\vec{v}_r = (1, 2) \Rightarrow m_r = 2$$

$$\vec{u}_s = (-3, a) \Rightarrow m_s = -\frac{a}{3}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{para ser} \\ \text{perpendiculares} \end{array} \right) \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{-a}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

b)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2 - \frac{-a}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{-a}{3}} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{6+a}{3}}{\frac{3-2a}{3}} \Rightarrow 1 = \frac{6+a}{3-2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 2a = 6 + a \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

2) Sea el triángulo isósceles ABC, cuyo lado desigual es AB. Conocemos  $A(-2, 2)$ ,  $B(4, 0)$  y sabemos que C pertenece a la recta  $r: 3x + 3y - 22 = 0$

SUBIR NOTA: Halla el área del triángulo

### Solución

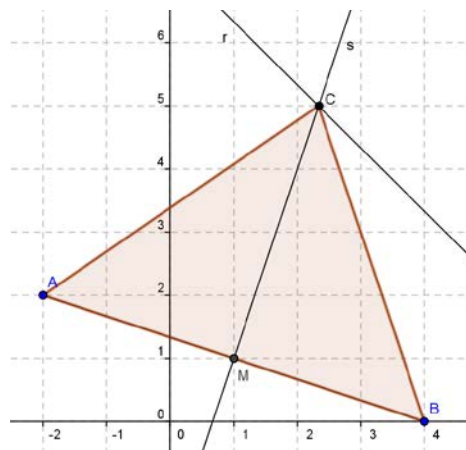
- Calculamos la ecuación de la mediatriz,  $s$ , del segmento  $\overline{AB}$ .

Sea M el punto medio de  $\overline{AB}$

$$M = \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (1, 1)$$

El vector  $\overline{AB}(6, -2) \Rightarrow \vec{n}(2, 6)$   
-B,A

La ecuación de la recta  $s$  será:



$$6x - 2y + D = 0 \text{ (como pasa por M)}$$

$$6 - 2 + D = 0$$

$$D = -4$$

$$\boxed{s: 6x - 2y - 4 = 0}$$

- C será el punto de corte de r y s ( $C = r \cap s$ )

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x + 3y - 22 = 0 \\ s: 6x - 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -6x - 6y + 44 = 0 \\ 6x - 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 10 - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 14 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$
$$-8y + 40 = 0 \Rightarrow y = 5$$

Por lo tanto el punto  $C = \left(\frac{7}{3}, 5\right)$

SUBIR NOTA:

- La base mide  $|\overline{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
- La altura mide  $|\overline{MC}| = \left| \left(\frac{4}{3}, 4\right) \right| = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

Por lo tanto el área del triángulo será:

$$A = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{MC}|}{2} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3}}{2} = \frac{8\sqrt{10^2}}{6} = \frac{4 \cdot 10}{3} = \boxed{\frac{40}{3} u^2}$$