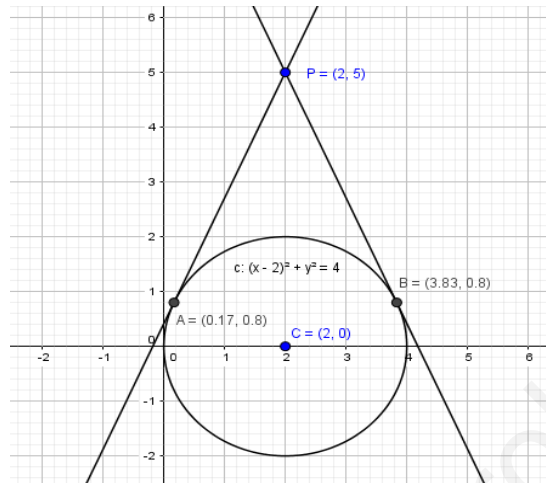


1. Sea la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2 . Sea el punto $P(2,5)$. Obtener los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P . (Ayuda: si dibujas primero la circunferencia, la posición del punto P respecto al centro puede facilitar los cálculos).

La ecuación de la circunferencia resulta $\rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$.

La representamos en Geogebra, junto al punto $P(2,5)$ y a las rectas tangentes.



El punto $P(2,5)$ se encuentra sobre la vertical del centro de la circunferencia, por lo que los puntos de tangencia serán simétricos respecto a la recta vertical $x=2$, como puede apreciarse en la imagen.

Sabemos que la distancia del punto P a cada punto de tangencia coincide con la raíz cuadrada de la potencia. Calculemos la potencia del punto.

$$Pot(P) = d(P, C)^2 - r^2$$

$$d(P, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (5-0)^2} = 5 \rightarrow \text{Que podíamos deducir viendo la gráfica superior}$$

$$r=2 \rightarrow Pot(P) = 5^2 - 2^2 = 21$$

La distancia de P a cada punto de tangencia será $\sqrt{21}$. Si llamamos a uno de los puntos de tangencia $A(x, y)$ cumplirá entonces:

$$D(P, A) = \sqrt{21} \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{21} \rightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 21$$

Además el punto $A(x, y)$ cumple que dista del centro de la circunferencia una distancia igual al radio. Es decir, el punto $A(x, y)$ satisface la ecuación de la circunferencia.

$$D(C, A) = r \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = 2 \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-5)^2 = 21 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow (y-5)^2 - y^2 = 17$$

$$y^2 + 25 - 10y - y^2 = 17 \rightarrow 8 = 10y \rightarrow y = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$$

La coordenada horizontal resulta $\rightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4 \rightarrow x=0,17, x=3,83$

Los puntos solución son $A(0,17, 0,8)$ y $A(3,83, 0,8)$.

2. Sea la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+3=0$. Determinar si los siguientes puntos son externos, internos o pertenecientes a la circunferencia.

- a) $(3,0)$
- b) $(1,-2)$
- c) $(3,1)$

La forma más directa de saber la posición relativa de un punto respecto a una circunferencia es comparar la distancia del punto al centro con el valor del radio.

Comparando $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ con la fórmula general $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ como hemos explicado en clase y desarrollado en varios ejercicios, concluimos:

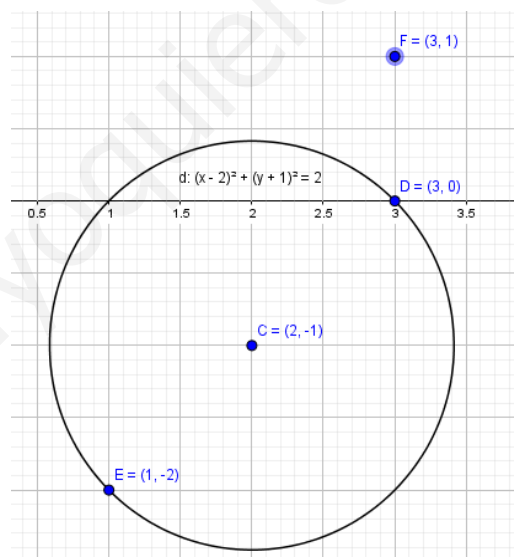
$$C(2,-1)$$

$$r=\sqrt{2}$$

a) $P(3,0) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1+0)^2}=\sqrt{2}=r \rightarrow$ punto perteneciente a la circunferencia

b) $P(1,-2) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}=r \rightarrow$ punto perteneciente a la circunferencia

c) $P(3,1) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}>r \rightarrow$ punto exterior



6. Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas que pasa por (0,4) y excentricidad $e = \frac{3}{5}$

La ecuación general de la elipse centrada en el origen es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Suponemos eje mayor paralelo al eje horizontal. Cuando tengamos la solución, verificaremos si la hipótesis es cierta o si, en cambio, el eje mayor es paralelo al eje vertical.

Necesitamos determinar dos parámetros: el valor de los semiejes. Por lo tanto, necesitamos dos condiciones.

Si la elipse pasa por (0,4) $\rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow b = 4$

Por definición $e = \frac{c}{a}$. Si el enunciado afirma $e = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a$

Toda elipse cumple la condición $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 16 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow a = 5$

Quedando la elipse solución $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Con el eje mayor paralelo al eje horizontal.

8. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación de dicha elipse si el centro coincide con el origen de coordenadas.

Si la distancia focal es 4 $\rightarrow 4 = 2c \rightarrow c = 2$

La suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos coincide con el eje mayor. Por lo tanto:

$$2 + 6 = 2a \rightarrow a = 4$$

De la relación que cumple toda elipse $\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 16 = b^2 + 4 \rightarrow b = \pm\sqrt{12}$

La ecuación de la elipse solución resulta (suponiendo eje mayor paralelo al eje horizontal):

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

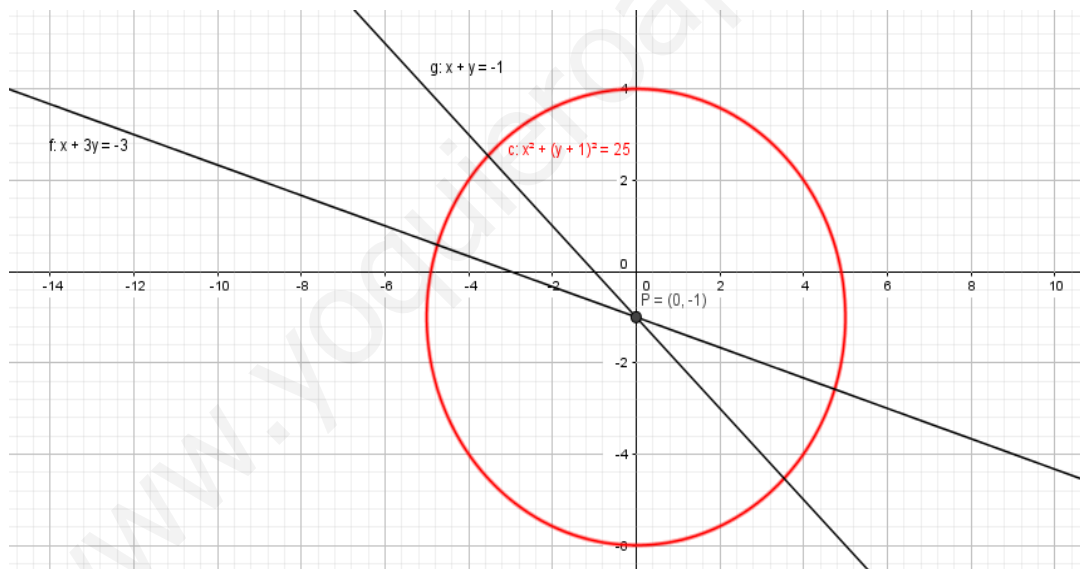
7. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$ y su radio es igual a 5 .

La intersección de las rectas se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones formada por ambas rectas.

$$\begin{cases} x+3y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow 2y+2=0 \rightarrow y=-1 \rightarrow x=0$$

El punto de corte es $P(0,-1)$, por lo que la circunferencia centrada en este punto y de radio 5 resulta:

$$x^2+(y+1)^2=25$$



8. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la de ecuación $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ y que pasa por el punto $(-3,4)$.

Debemos obtener el centro de $x^2+y^2-6x+2y-6=0$, ya que será el mismo que el centro de la circunferencia solución. Comparamos con la ecuación general de una circunferencia

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$x^2+x_0^2-2x_0x+y^2+y_0^2-2y_0y=r^2 \rightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

Comparamos término a término con la circunferencia del enunciado.

$$-6=-2x_0 \rightarrow x_0=3$$

$$2=-2y_0 \rightarrow y_0=-1$$

El centro resulta $P(x_0,y_0)=(3,-1) \rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=r^2$

Para obtener el radio imponemos que la circunferencia pase por el punto $(-3,4)$. Es decir.

$$(-3-3)^2+(4+1)^2=r^2 \rightarrow 36+25=r^2 \rightarrow r=+\sqrt{61}$$

La circunferencia solución resulta $\rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=61$

