

EXAMEN DE ÁLGEBRA

NOMBRE Y APELLIDOS: _____

1º) Sabiendo que : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$ calcular:

a) $\left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4 \right|$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

2º) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución de la ecuación $A \cdot X = B$

b) Si $\beta = \gamma = 1$ calcular el valor de α para que el sistema $A \cdot X = O$ sea compatible determinado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$ resuelve la ecuación $A \cdot X = B$

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$

a) Hallar el valor de "a" para que exista la matriz inversa de A.

b) Calcular la matriz inversa de A para $a=2$.

4º) Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 4x + 4\alpha y + 2z = 2\alpha \\ \alpha x + y - \alpha z = \alpha \\ 4\alpha x + 4\alpha y + \alpha z = 9 \end{cases}$$

a) Discutirlo en función del parámetro

b) Resolverlo para $\alpha = -1$.

Elegir uno de los siguientes ejercicios:

I) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $A^2 - 4.A + 3.I$

b) Demostrar que $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (4.I - A)$

c) Calcular $(A - 2.I)^{-1}$

II) Resolver la ecuación : $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$

III) Resolver la ecuación matricial: $X \cdot B = A + B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad a) \quad \text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A^4| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^4.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow |A^4| = 6^4$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$$

$$c) \quad \begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$$

← dos filas proporcionales

$$= 0 + 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 4 \cdot (-3) = -12.$$

2º) a) Tenemos que resolver el sistema:

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right\} \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ el}$$

sistema es C.D. Lo resolvemos por Cramer:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = \frac{9}{2} \quad \gamma = -3$$

b) Si $\beta = \gamma = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es homogéneo \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{es SCD si } \text{rg } A = 3. \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha \cdot (1 - \alpha)$$

\Rightarrow Si $\alpha \neq 0, 1 \Rightarrow$ SCD. solución única $x = y = z = 0$.

c) Si $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$. Es fácil desarrollar:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

$$3^{\circ} \quad a) \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 5 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Existe A^{-1} si $a \neq \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$$b) \quad \text{Si } a=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5 - 2 \cdot 2^2 = 5 - 8 = -3.$$

$$(A \text{ dj } A) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & +2 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$4^{\circ} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4\alpha & 2 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -20\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - \frac{1}{5})$$

$$\text{Si } \alpha \neq 0, 1, 1/5 \Rightarrow \text{rg } \Delta = \text{rg } \Delta^* = 3 \Rightarrow \boxed{\text{S.C.D.}} \quad c_3 \leftrightarrow c_4$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow \text{rg } \Delta = 2 \quad \text{y} \quad \text{rg } \Delta^* = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow \boxed{\text{S.I.}}$

$$\text{Si } \alpha = 1 \Rightarrow \text{rg } \Delta = 2 \quad \text{y} \quad \text{rg } \Delta^* = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \boxed{\text{S.I.}} \quad \rightarrow \det \neq 0$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{rg } \Delta = 2 \Rightarrow \text{rg } \Delta^* = \begin{pmatrix} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{pmatrix} = 3$$

Pues el determinante $\{c_2 c_3 c_4\} \neq 0. \Rightarrow \boxed{\text{S.I}}$

$$\text{b) Si } \alpha = -1 \Rightarrow \text{rg } \Delta = 3 \text{ y } \text{rg } \Delta^* = 3 \Rightarrow \boxed{\text{S.C.D}}$$

$$|A| = 48 \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ +9 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{48} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & +9 & -1 \end{vmatrix}}{48} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & +9 \end{vmatrix}}{48} = -1$$

Ⓘ

$$a) \quad A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$b) \quad \text{Como } A^2 - 4A + 3I = 0 \Rightarrow A^2 - 4A = -3I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(A - 4I) = -3I \Rightarrow A \cdot \left[-\frac{1}{3}(A - 4I) \right] = I \Rightarrow$$


$$\Rightarrow A \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3}(4I - A) \right]} = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A).$$

$$c) \quad (A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I =$$
$$= \underbrace{A^2 - 4A + 3I}_{\substack{\text{apartado} \\ a) \text{ es } 0}} + I = 0 + I = I$$

luego $(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = I \Rightarrow$

$$(A - 2I)^{-1} = (A - 2I)$$

$$\text{III) } X^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Pues $X^{-1} = (A+B) \cdot B^{-1}$ 

$$\text{II) } \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc|ccc} x+1 & x & x & & & \\ x & x+1 & x & & & \\ x & x & x+1 & & & \end{array} \right| \xrightarrow{E_1-E_2} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & x & & & \\ -1 & x+1 & x & & & \\ 0 & x & x+1 & & & \end{array} \right| \xrightarrow{E_2-E_3} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & & & \\ -1 & 1 & x & & & \\ 0 & -1 & x+1 & & & \end{array} \right| = \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E_2-E_1 \\ = \end{array} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & & & \\ -2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & x+1 & & & \end{array} \right| = (x+1) + 2x - 0 = 3x+1 = 0$$

$x = -1/3$