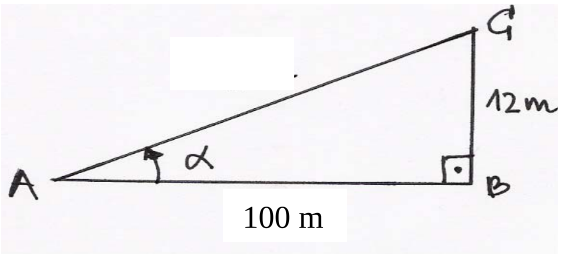
PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

1º Una señal de carretera indica que la pendiente de ese tramo es del 12%, lo que quiere decir que por cada 100 metros que recorre en horizontal asciende 12 metros. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Y si fuera del 24%? Obtén la fórmula general que relaciona la pendiente de una carretera, p (expresada en %) con el ángulo α que forma la carretera con la horizontal.



AC carretera, AB horizontal, BC vertical

Caso 12%

$$tg\alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}12 \approx 5º\ 42'\ 38''$$

Caso 24%

$$tg\alpha = \frac{24}{100} \Rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}24 \approx 13º\ 29'\ 44''$$

Caso p%

$$tg\alpha = \frac{p}{100} \Rightarrow \alpha = arctg\ \frac{p}{100}$$

2º Calcula el ángulo que forma la diagonal de una cara con la diagonal del cubo.

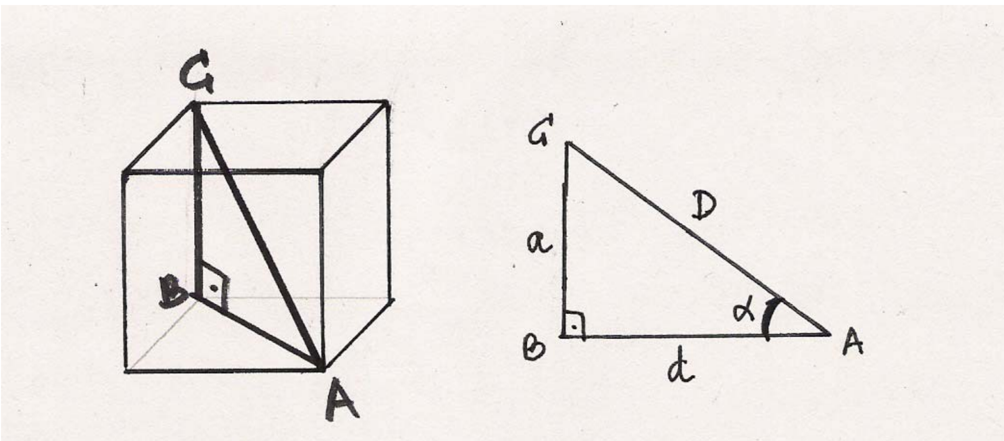
Sean **a** la medida de la arista, **d** la de la diagonal de la cara y **D** la de la diagonal del cubo.

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

Considera el triángulo rectángulo

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35º15'51'' = 0{,}6154 \text{ rad}$$



3º Resuelve el triángulo del cual se conoce su perímetro: 30 cm y la medida de dos de sus ángulos: 40º y 80º.

Sea A=40º y B=80º $C = 180º - A - B = 60º$

Aplicamos el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{30-(a+b)}{\text{sen}C}$, pues $a+b+c=30$, y tenemos un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas: ay b.

$$\begin{cases} a \cdot \text{sen}80º = b \cdot \text{sen}40º \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \text{sen}80º}{\text{sen}40º} \\ a \cdot \text{sen}60º = (30 - a - b) \cdot \text{sen}40º \end{cases} \Rightarrow a \cdot \text{sen}60º = (30 - a - \frac{a \cdot \text{sen}80º}{\text{sen}40º}) \cdot \text{sen}40º \Rightarrow$$

$$a(sen60º + sen40º + sen80º) = 30 \cdot sen40º \Rightarrow a = \frac{30 \cdot sen40º}{sen60º + sen40º + sen80º} \approx 7{,}73cm$$

$$b = \frac{a \cdot sen80º}{sen40º} \approx \frac{7.73 \cdot sen80º}{sen40º} \approx 11{,}84cm \Rightarrow c = 30 - a - b \approx 10{,}43cm$$

4º Indica en cada uno de los siguientes casos, si el triángulo correspondiente es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) a=97, b=72, c=65
b) a=90, b=72, c=65
c) a=100, b=72, c=65

(Observación: no es necesario resolver el triángulo)

Estudiaremos el ángulo mayor, que está asociado al lado mayor.
El teorema del coseno establece que

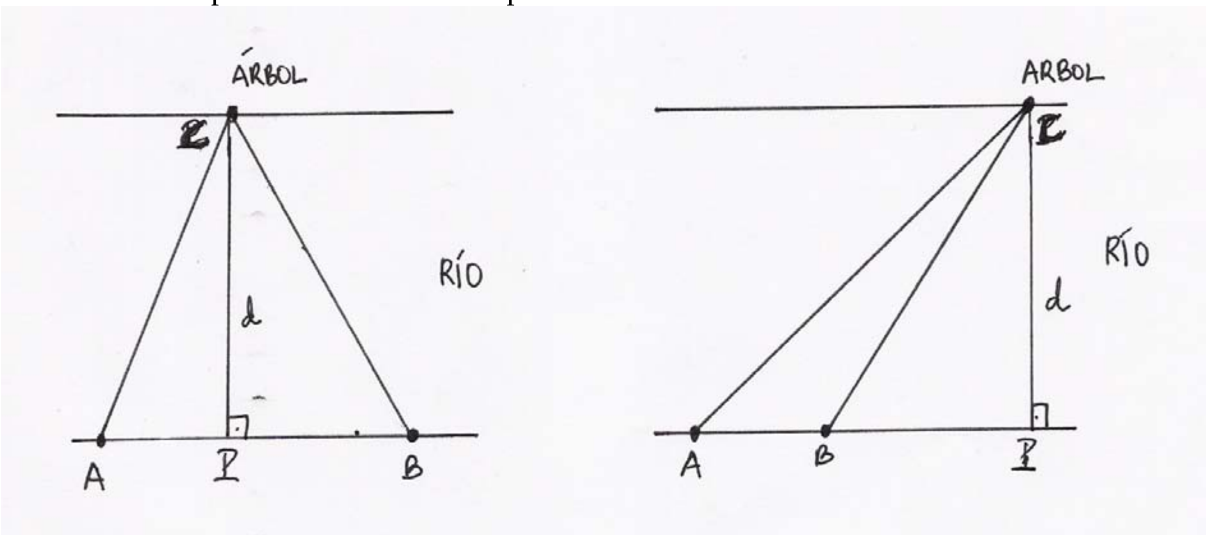
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

a) $\cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 97^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = 0 \Rightarrow A = 90º$.

b) $\cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 90^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{1309}{9360} > 0 \Rightarrow A < 90º \Rightarrow$ es un triángulo acutángulo.

c) $\cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 100^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{-591}{9360} < 0 \Rightarrow A > 90º \Rightarrow$ es un triángulo obtusángulo.

5º Para calcular la anchura de un río fijamos dos puntos A y B, ambos situados en nuestra orilla distantes 5 metros uno de otro. Observamos un árbol cuya base está situada en la orilla opuesta. Las visuales al árbol con la línea que une A y B forman ángulos de 55º y 65º respectivamente. Calcula la anchura del río.
Observación: el problema admite DOS planteamientos.



Caso 1: El árbol está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55º, B = 65º, C = 180º - A - B = 60º, c = 5m.$ Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\mathrm{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\,\mathrm{sen}A = b\,\mathrm{sen}55º$

Triángulo ABC: teorema del seno $\frac{c}{\mathrm{sen}C} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} \Rightarrow \frac{5}{\mathrm{sen}60º} = \frac{b}{\mathrm{sen}65º} \Rightarrow b = \frac{5\mathrm{sen}65º}{\mathrm{sen}60º} \approx 5.23\mathrm{m}$

$\Rightarrow d \approx 5{,}23 sen55º \approx 4{,}28m$

Caso 2: El árbol NO está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55º, B = 180º - 65º = 115º, C = 180º - A - B = 10º, c = 5m.$ Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre la recta que contiene a AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\mathrm{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\,\mathrm{sen}A = b\,\mathrm{sen}55º$

Triángulo ABC: teorema del seno

$$\frac{c}{senC} = \frac{b}{senB} \Rightarrow \frac{5}{sen10º} = \frac{b}{sen115º} \Rightarrow b = \frac{5sen115º}{sen10º} \approx 26{,}09m$$

$\Rightarrow d \approx 26{,}09 sen55º \approx 21{,}37m$

Observación: la posición relativa es la del dibujo pues la visual de A es menor que la visual de B

6º Resuelve los triángulos:

a) A=45º, a=8 cm, b=10 cm.

¿B? Teorema del seno:

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}\Rightarrow\frac{8}{sen45^o}=\frac{10}{senB}\Rightarrow senB=\frac{10sen45^o}{8}\approx 0{,}88cm\Rightarrow\begin{cases}B\approx 62{,}11^o=62^o6'36''\\ B'=180-B\approx 117{,}89^o=117^o53'24''\end{cases}$$

.

Veamos si las dos soluciones son válidas:

Si B=62.11º $C=180^o-A-B\approx 17.11^o$ y **c** se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c}{senC}=\frac{a}{senA}\Rightarrow c=\frac{asenC}{senA}=\frac{8sen17.11}{sen45}\approx 3.32cm$$

Si B'=117.89º $C'=180^o-A-B'\approx 72.89^o$ y **c'** se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c'}{senC}=\frac{a}{senA}\Rightarrow c'=\frac{asenC'}{senA}=\frac{8sen72.89}{sen45}\approx 10.81cm$$

b) a=23 cm, B=53º, C=84º.

¿A? A=180º-B-C=43º

¿b? Teorema del seno $\frac{b}{senB}=\frac{a}{senA}\Rightarrow b=\frac{asenB}{senA}=\frac{23sen53^o}{sen43^o}\approx 26.93cm$

¿c? Teorema del seno $\frac{c}{senC}=\frac{a}{senA}\Rightarrow c=\frac{asenC}{senA}=\frac{23sen84^o}{sen43^o}\approx 33.53cm$

c) a=5 cm, b=4 cm, C=47º.

¿c? Teorema del coseno

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos C\Rightarrow c^2=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos 47^o\Rightarrow c\approx 3{,}70cm$$

¿B? Teorema del seno

$$\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}\Rightarrow senB=\frac{bsenC}{c}=\frac{4sen47^o}{3.70}\approx 0.79\Rightarrow\begin{cases}B\approx 52{,}24^o=52^o14'24''\\ B'=180-B\approx 127{,}76^o\end{cases}$$

La 2º solución,**B'**, no es posible pues A=180º-B'-C=5.24º con A<B y a>b.

¿A? A=180-B-C=80.76º=80º45'36''

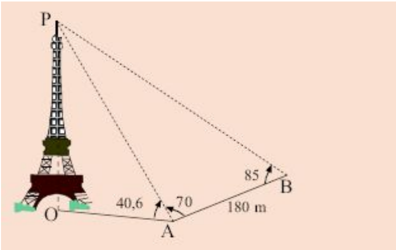
d) a=5 cm, b=4 cm. c=11 cm.

No es posible pues $a+b<c$

e) a=2 cm, b=9 cm, A=125º.

¿B? Teorema del seno: $\frac{b}{senB}=\frac{a}{senA}\Rightarrow senB=\frac{bsenA}{a}=\frac{9sen125^o}{2}\approx 3{,}68>1\Rightarrow$ no es posible.

7º Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



Se consideran los triángulos AOP, recto en O y ABP. Sea OP la altura de la torre.

En AOP $\mathrm{sen}40{,}6^{o} = \frac{OP}{b} \Rightarrow OP = b\,\mathrm{sen}40{,}6^{o}$

En ABP $P = 180^{o} - A - B = 25^{o}$, p=180m y aplicando el teorema del seno

$$\frac{b}{senB} = \frac{p}{senP} \Rightarrow b = \frac{psenB}{senP} = \frac{180sen85^{o}}{sen25^{o}} \approx 424{,}29m$$

$$\Rightarrow OP \approx 424{,}29sen40{,}6^{o} \approx 276{,}12m$$