

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO

1. Si $A(-4, 5)$, $B(1, 2)$ y $C(6, 3)$ son tres vértices del paralelogramo $ABCD$, halla el 4º vértice D .
¿Cuál sería el resultado si se tratase del paralelogramo $ACBD$?
2. Halla el ángulo que forma la recta $y = \frac{10-5x}{8}$ con el eje de abscisas.
3. Dado el segmento de extremos $A(3, 5)$ y $B(6, 15)$, calcula las coordenadas de los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
4. Representa las rectas dadas por las ecuaciones:

$a) y = -3$	$c) x = 5$
$b) \left. \begin{array}{l} x = -t \\ y = 1+t \end{array} \right\}$	$d) \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{2}$
5. Determina si los puntos $A(-\frac{1}{2}, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(3, -\frac{1}{3})$ están alineados.
6. Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $A(1, -8)$ y tiene igual pendiente que la recta $-x + y + 3 = 0$
7. Calcula el ángulo agudo que forman las rectas:

$r \equiv y = \frac{3-5x}{6}$	}
$r' \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1+2r \\ y = 3-r \end{array} \right.$	
8. Sin resolver los sistemas explica en cada apartado si las rectas son secantes, paralelas o coincidentes:

$a) \left. \begin{array}{l} 6x+2y-5=0 \\ 3x+y+7=0 \end{array} \right\}$	$b) \left. \begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ x-3y-5=0 \end{array} \right\}$	$c) \left. \begin{array}{l} -x-y+3=0 \\ 2x+2y-6=0 \end{array} \right\}$
---	--	---
9. Determina el valor de m para que $3x + my - 7 = 0$, $4x + y - 14 = 0$ y $7x + 2y - 28 = 0$ pertenezcan a un mismo haz de rectas
10. a) Halla las ecuaciones implícitas de las diagonales del cuadrilátero cuyos lados son las rectas:

$x = 3$	$y - x = 0$	$y + x + 1 = 0$	$y + 2 = 0$
---------	-------------	-----------------	-------------

 b) Construye con Geogebra un gráfico con el cuadrilátero y sus diagonales y que muestre rotuladas sus ecuaciones.
11. Calcula el área del círculo circunscrito al triángulo que determina la recta $4x + 3y - 24 = 0$ con los ejes coordenados.
12. De todas las rectas paralelas a $y = \frac{2-4x}{3}$ escribe la ecuación explícita de aquellas que distan 2 unidades del punto $(1, 1)$
13. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas $3x - y - 1 = 0$, $-6x + 2y - 8 = 0$.
14. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan triple de la recta $2x + y - 3 = 0$ que de la recta $2x + 4y - 6 = 0$
15. Halla el área del triángulo de vértices $A(-3, -4)$, $B(-2, 1)$ y $C(4, -1)$
16. Halla por intersección de las medianas, las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son: $A(-4, 2)$, $B(1, 7)$ y $C(5, -2)$
17. Halla el ortocentro del triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(0, 1)$ y $C(5, 0)$

18. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(-1, 1)$ $B(1, 2)$ y $C(2, -2)$

19. Calcula el incentro del triángulo cuyos lados están contenidos en las rectas:

$$y - 4 = 0 \quad 3x + 4y - 24 = 0 \quad 4x + 3y + 24 = 0.$$

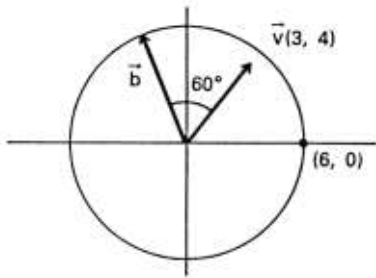
20. Dados los vectores $\vec{a} = (3, -4)$ y $\vec{b} = (5, x)$ calcula x para que:

- a) Sean paralelos b) Sean perpendiculares c) Formen un ángulo de 60°

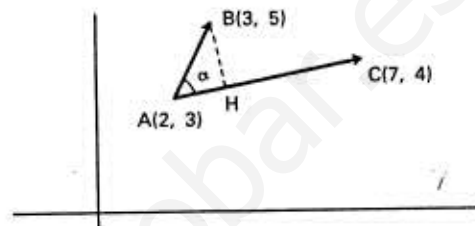
21. Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$, $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 12$ calcula: a) $(3\vec{a} - \vec{b})^2$ b) $(4\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b})$

22. Sean \vec{a} y \vec{b} vectores tales que: $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$ y $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$ calcula el producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

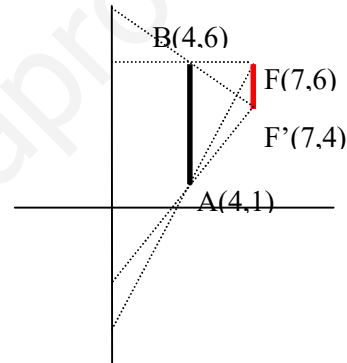
23. Calcula las componentes del vector \vec{b}



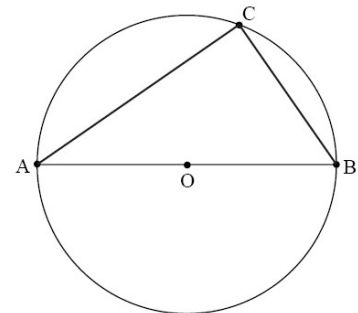
24. Halla α , la distancia AH y las coordenadas de H



25. El segmento FF' es un filamento luminoso. La luz emitida se encuentra con el segmento AB que, al ser opaco, produce sobre el eje Y una zona de sombra y dos de penumbra. ¿Cuánto miden cada una de ellas?



26. En la siguiente figura, $[AB]$ representa el diámetro del círculo con centro en O . El punto C está situado sobre la circunferencia del círculo. Sean $\vec{OB} = \vec{b}$ y $\vec{OC} = \vec{c}$.



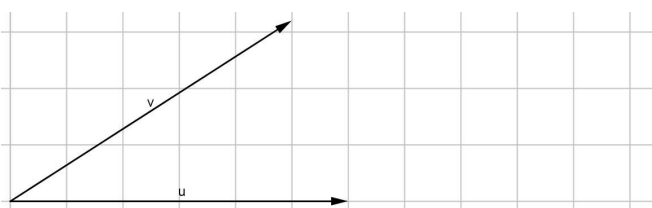
a) Halle una expresión para \vec{CB} y otra para \vec{AC} , en función de \vec{b} y de \vec{c} .

b) A partir de lo anterior, demuestre que \hat{ACB} es un ángulo recto.

27. Dado el vector $\vec{v} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, halla los dos vectores paralelos y los dos vectores perpendiculares cuyo módulo sea 15.

28. Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} del diagrama:

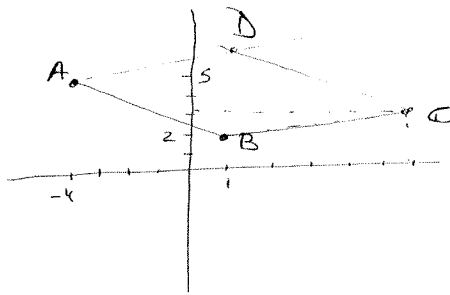
- a) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$
 b) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$



29. Tres vectores no nulos distintos entre sí vienen dados por $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ y $\vec{OC} = \vec{c}$.

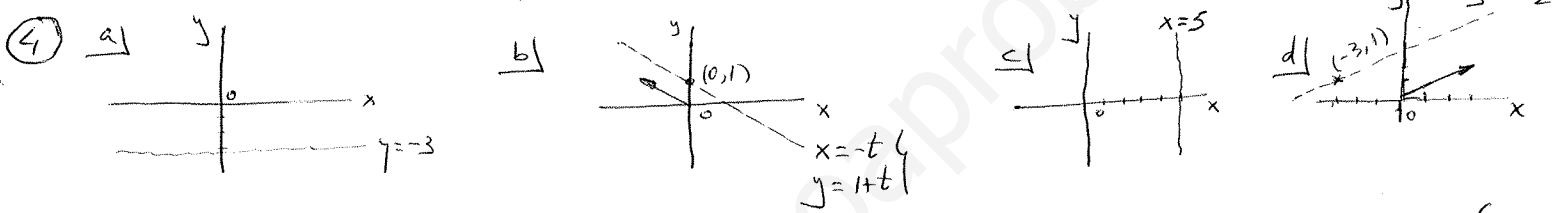
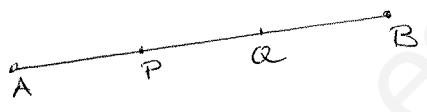
Si \vec{OA} es perpendicular a \vec{BC} y \vec{OB} es perpendicular a \vec{CA} , compruebe que \vec{OC} es perpendicular a \vec{AB}

① $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\vec{OD} = \vec{OA} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
 $\boxed{D = (1, 6)}$
 $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\vec{OD} = \vec{OA} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\boxed{D = (-9, 4)}$

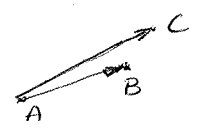


② $y = \frac{10-5x}{8} \rightarrow m = -\frac{5}{8} \Rightarrow \text{tg } \alpha = -\frac{5}{8} \Rightarrow \alpha \approx -32^\circ \equiv \boxed{148^\circ}$

③ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 15-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$
 $\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 25/3 \end{pmatrix}$
 $\vec{OQ} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35/3 \end{pmatrix}$
 $\boxed{P(4, \frac{25}{3})}$ $\boxed{Q(5, \frac{35}{3})}$



⑤ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5+1/2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pendiente} = \frac{-3}{11/2} = -\frac{6}{11}$
 $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3+1/2 \\ -1/3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pendiente} = \frac{-7/3}{7/2} = -\frac{2}{3}$
 Al ser distintas no están alineadas



⑥ $-x+y+3=0 \rightarrow y=x-3 \rightarrow \text{pendiente} = 1 \rightarrow y+8=1 \cdot (x-1) ; \boxed{-x+y+9=0}$
 También: $-x+y+c=0 ; -1-8+c=0 \Rightarrow c=9 \rightarrow -x+y+9=0 \checkmark$

⑦ $y = \frac{3-5x}{6} \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{6} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$
 $x = -1+2r$
 $y = 3-r \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}| \cdot |\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}|} = \frac{12+5}{\sqrt{36+25} \sqrt{4+1}} = \frac{17}{\sqrt{305}} \Rightarrow \boxed{\theta = 13^\circ}$
 También: $m_1 = -5/6$
 $m_2 = -1/2 \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{-1/2 + 5/6}{1 + (-5/6) \cdot (-1/2)} = \frac{2/6}{1 + 5/12} = \frac{4}{17} \Rightarrow \theta = 13^\circ \checkmark$

⑧ a) $\begin{cases} 6x+2y-5=0 \\ 3x+y+7=0 \end{cases} \quad \frac{6}{3} = \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{7} \Rightarrow \text{PARALELAS}$

b) $\begin{cases} x+3y-4=0 \\ x-3y-5=0 \end{cases} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow \text{SECANTES}$

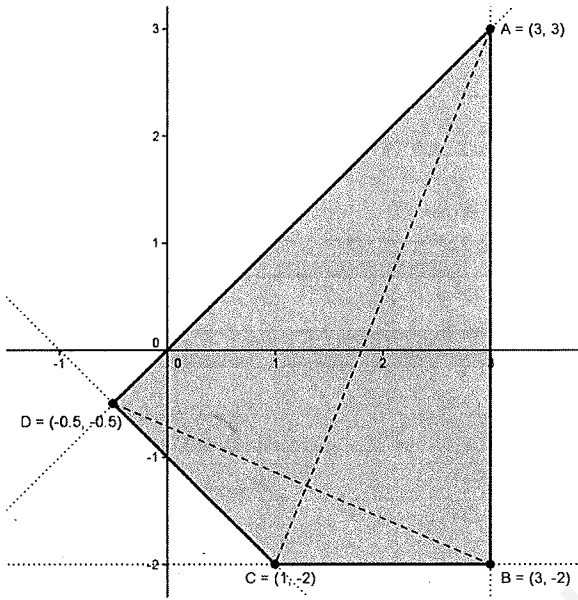
c) $\begin{cases} -x-y+3=0 \\ 2x+2y-6=0 \end{cases} \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{3}{-6} \Rightarrow \text{COINCIDENTES}$

9)
$$\begin{cases} 4x + y - 14 = 0 \\ 7x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 2y - 28 = 0 \\ 7x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 0} \rightarrow \boxed{y = 14} \quad P(0, 14)$$

$(0, 14) \in 3x + my - 7 = 0 \Rightarrow 0 + 14m - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$

10)
$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x = 3 \\ r_2 &\equiv y - x = 0 \\ r_3 &\equiv y + x + 1 = 0 \\ r_4 &\equiv y + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 \cap r_2 &\Rightarrow (3, 3) & r_1 \cap r_3 &\Rightarrow (3, -4) \\ r_2 \cap r_3 &\Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & r_2 \cap r_4 &\Rightarrow (-2, -2) \\ r_3 \cap r_4 &\Rightarrow (1, -2) \end{aligned}$$

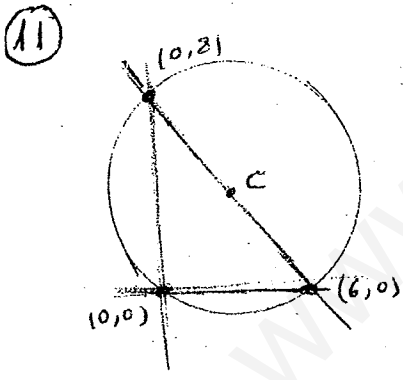


$$\overline{AC} = (-2, -5) \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow \boxed{y = \frac{5x-9}{2}}$$

$$\overline{DB} = (3 + \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2}) = (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}) \quad \frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-3}$$

$$\boxed{y = \frac{-3x-5}{7}}$$

Diagonals:
$$\begin{cases} -5x + 2y + 9 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$$



$$4x + 3y - 24 = 0 \quad \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y=8 & (0, 2) \\ y=0 &\Rightarrow x=6 & (6, 0) \end{aligned}$$

Como es un triángulo Rectángulo, el punto medio es el centro de la circunferencia: $C(3, 4)$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \boxed{\text{Area} = 25\pi \text{ u.s.}}$$

12)
$$y = \frac{2-4x}{3} \rightarrow 3y = 2-4x \rightarrow 4x + 3y - 2 = 0$$

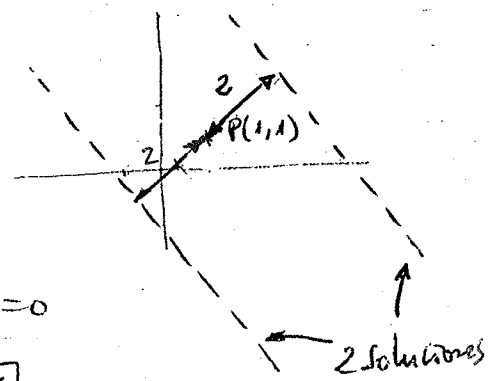
$$4x + 3y + C = 0$$

$$2 = \frac{|4 + 3 + C|}{\sqrt{16+9}}$$

$$|7 + C| = 10$$

$$\begin{aligned} 7 + C &= 10 & \boxed{C = 3} \\ 7 + C &= -10 & \boxed{C = -17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 3 &= 0 & \boxed{y = \frac{-4x-3}{3}} \\ 4x + 3y - 17 &= 0 & \boxed{y = \frac{17-4x}{3}} \end{aligned}$$



$$(13) \frac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}} = \frac{|-6x+2y-8|}{\sqrt{36+4}} ; \frac{3x-y-1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{-6x+2y-8}{\sqrt{40}} ; \frac{3x-y-1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{-6x+2y-8}{2\sqrt{10}}$$

$$3x-y-1 = \pm (-3x+y-4)$$

$$\begin{cases} 3x-y-1 = -3x+y-4 \\ 6x-2y+3 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x-y-1 = 3x-y+4 \\ \text{Absurdo} \end{array} \right.$$

Al ser paralelas las rectas dadas, sólo habrá una recta solución que será también paralela.

Solución

$$(14) \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{4+1}} = 3 \frac{|2x+4y-6|}{\sqrt{4+16}} ; \frac{2x+y-3}{\sqrt{5}} = \pm 3 \frac{2x+4y-6}{\sqrt{20}} ; \frac{2x+y-3}{\sqrt{5}} = \pm 3 \frac{2x+4y-6}{2\sqrt{5}}$$

$$2x+y-3 = \pm (3x+6y-9)$$

$$\begin{cases} 2x+y-3 = 3x+6y-9 \\ 0 = x+5y-6 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-3 = -3x-6y+9 \\ 5x+7y-12 = 0 \end{array} \right.$$

Dos Soluciones

(15) Base

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

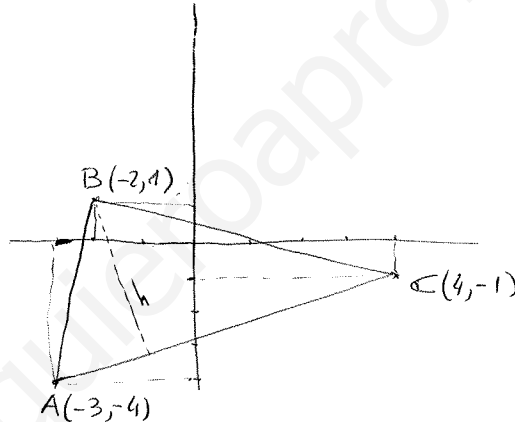
Ecuación Base

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow m = \frac{3}{7}$$

$$y+1 = \frac{3}{7}(x-4)$$

$$7y+7 = 3x-12$$

$$-3x+7y+19=0$$



Altura

$$h = d(B; AC) = \frac{|-3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 19|}{\sqrt{9+49}} = \frac{32}{\sqrt{58}}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{32}{\sqrt{58}}}{2} = 16 \text{ u.s.}$$

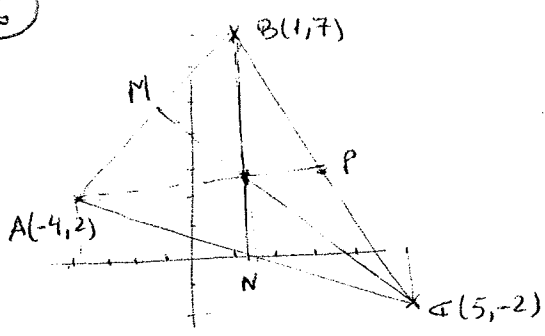
También

$$\cos \hat{A} = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+25} \sqrt{49+9}} = \frac{7+15}{\sqrt{26} \sqrt{58}} = \frac{22}{\sqrt{1508}}$$

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{22}{\sqrt{1508}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1024}{1508}} = \frac{32}{\sqrt{1508}}$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{58} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{32}{\sqrt{1508}}}{2} = 16 \checkmark$$

16



$M = (-\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
 $\vec{MC} = (5 + \frac{3}{2}, -2 - \frac{9}{2}) = (\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}) \rightarrow \text{pend} = -1$

Mediana
 vertical C: $y + 2 = -1(x - 5) \rightarrow \boxed{y = 3 - x}$

$N = (\frac{1}{2}, 0)$
 $\vec{BN} = (\frac{1}{2} - 1, 0 - 7) = (-\frac{1}{2}, -7) \rightarrow \text{pend} = 14$

Mediana
 vertical B: $y - 7 = 14(x - 1) \rightarrow \boxed{y = 14x - 7}$

$P = (3, \frac{5}{2})$
 $\vec{AP} = (3 + 4, \frac{5}{2} - 2) = (7, \frac{1}{2}) \rightarrow \text{pend} = \frac{1}{14}$

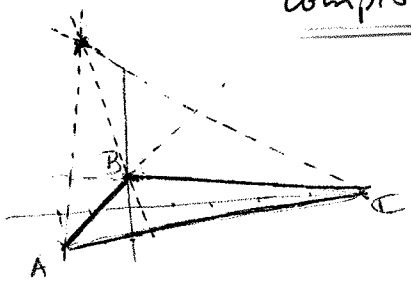
Mediana
 vertical A: $y - 2 = \frac{1}{14}(x + 4) \rightarrow \boxed{y = \frac{x + 32}{14}}$

$y = 3 - x$
 $y = 14x - 7$
 $\rightarrow 3 - x = 14x - 7$
 $-15x = -10$
 $x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
 $y = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Baricentro = $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$

Comprobación: $x = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{\frac{2}{3} + 32}{14} = \frac{7}{3}$ ✓

17



$A(-2, -1)$
 $B(0, 1)$
 $C(5, 0)$

$\vec{AB} = (2, 2) \rightarrow \text{pend} = 1$

Altura
 vertical C: $y = -(x - 5) \rightarrow \boxed{y = -x + 5}$

$\vec{AC} = (7, 1) \rightarrow \text{pend} = \frac{1}{7}$

Altura
 vertical B: $y - 1 = -7x \rightarrow \boxed{y = 1 - 7x}$

$\vec{BC} = (5, -1) \rightarrow \text{pend} = -\frac{1}{5}$

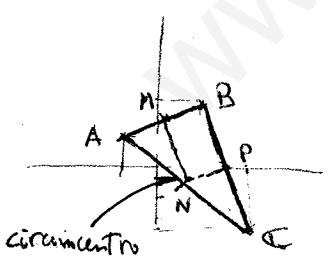
Altura
 vertical A: $y + 1 = 5(x + 2) \rightarrow \boxed{y = 5x + 9}$

$y = -x + 5$
 $y = 1 - 7x$
 $\rightarrow -x + 5 = 1 - 7x$
 $6x = -4$
 $x = -\frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}$

Orto centro $(-\frac{2}{3}, \frac{17}{3})$

Comprobación: $x = -\frac{2}{3} \rightarrow y = 5 \cdot \frac{-2}{3} + 9 = \frac{17}{3}$ ✓

18



$A(-1, 1)$
 $B(1, 2)$
 $C(2, -2)$

$M = (0, \frac{3}{2})$
 $\vec{AB} = (2, 1) \rightarrow \text{pend} = \frac{1}{2}$

Mediatriz
 lado AB: $y - \frac{3}{2} = -2x \rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2} - 2x}$

$N = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\vec{AC} = (3, -3) \rightarrow \text{pend} = -1$

Mediatriz
 lado AC: $y + \frac{1}{2} = 1(x - \frac{1}{2}) \rightarrow \boxed{y = x - 1}$

$P = (\frac{3}{2}, 0)$

$\vec{BC} = (1, -4) \rightarrow \text{pend} = -4$

Mediatriz
 lado BC: $y = \frac{1}{4}(x - \frac{3}{2}) \rightarrow \boxed{y = \frac{2x - 3}{8}}$

Comprobación: $x = \frac{5}{6} \rightarrow y = \frac{2 \cdot \frac{5}{6} - 3}{8} = -\frac{1}{6}$ ✓

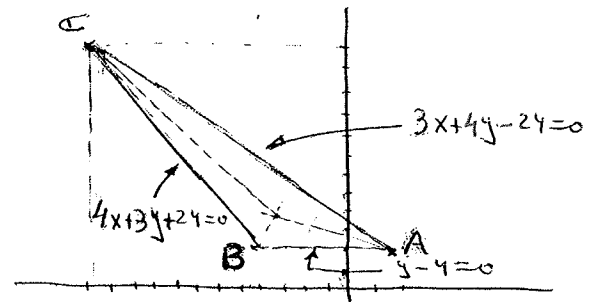
$y = \frac{3}{2} - 2x$
 $y = x - 1$
 $\rightarrow \frac{3}{2} - 2x = x - 1$
 $3x = \frac{5}{2}$
 $x = \frac{5}{6} \rightarrow y = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$ **Circuncentro $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6})$**

19

$$\begin{cases} y-4=0 \\ 3x+4y-24=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=4 \end{cases} A(\frac{8}{3}, 4)$$

$$\begin{cases} y-4=0 \\ 4x+3y+24=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=4 \end{cases} B(-9, 4)$$

$$\begin{cases} 3x+4y-24=0 \\ 4x+3y+24=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-24 \\ y=24 \end{cases} C(-24, 24)$$



$$\frac{|y-4|}{1} = \frac{|3x+4y-24|}{5} \rightarrow \begin{cases} y-4 = \frac{3x+4y-24}{5} \rightarrow 5y-20 = 3x+4y-24 \rightarrow y = 3x-4 \\ y-4 = -\frac{3x+4y-24}{5} \rightarrow 5y-20 = -3x-4y+24 \rightarrow y = \frac{-3x+44}{9} \end{cases}$$

$$\frac{|y-4|}{1} = \frac{|4x+3y+24|}{5} \rightarrow \begin{cases} y-4 = \frac{4x+3y+24}{5} \rightarrow 5y-20 = 4x+3y+24 \rightarrow y = 2x+22 \\ y-4 = -\frac{4x+3y+24}{5} \rightarrow 5y-20 = -4x-3y-24 \rightarrow y = \frac{-x-1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{|3x+4y-24|}{5} = \frac{|4x+3y+24|}{5} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y-24 = 4x+3y+24 \rightarrow y = x+48 \\ 3x+4y-24 = -4x-3y-24 \rightarrow y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x+22 \\ y = -x \end{cases} \rightarrow 2x+22 = -x \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{22}{3} \\ y = \frac{22}{3} \end{cases} \text{ Incentro } (-\frac{22}{3}, \frac{22}{3})$$

Comprobación: $x = -\frac{22}{3} \rightarrow y = \frac{-3 \cdot \frac{22}{3} + 44}{9} = \frac{22}{3}$ ✓

20

$$\vec{a}(3, -4) \quad \vec{b}(5, x)$$

a) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{x}{-4} \Rightarrow x = -\frac{20}{3}$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (3, -4) \cdot (5, x) = 0 \Rightarrow 15 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$

c) $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$

$$15 - 4x = \sqrt{9+16} \sqrt{25+x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

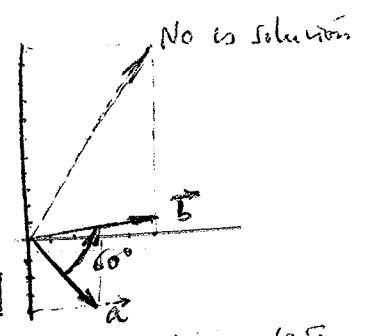
$$30 - 8x = 5\sqrt{25+x^2}$$

$$(30 - 8x)^2 = 25(25 + x^2)$$

$$900 - 480x + 64x^2 = 625 + 25x^2$$

$$39x^2 - 480x + 275 = 0$$

$$x = \frac{480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 39 \cdot 275}}{78} = \frac{480 \pm 250\sqrt{3}}{78} = \frac{240 \pm 125\sqrt{3}}{39}$$



Otro método: $(3-4i) \cdot 160^\circ = (3-4i) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right)$

El vector $(5, x)$ debe ser paralelo a $\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right)$ luego:

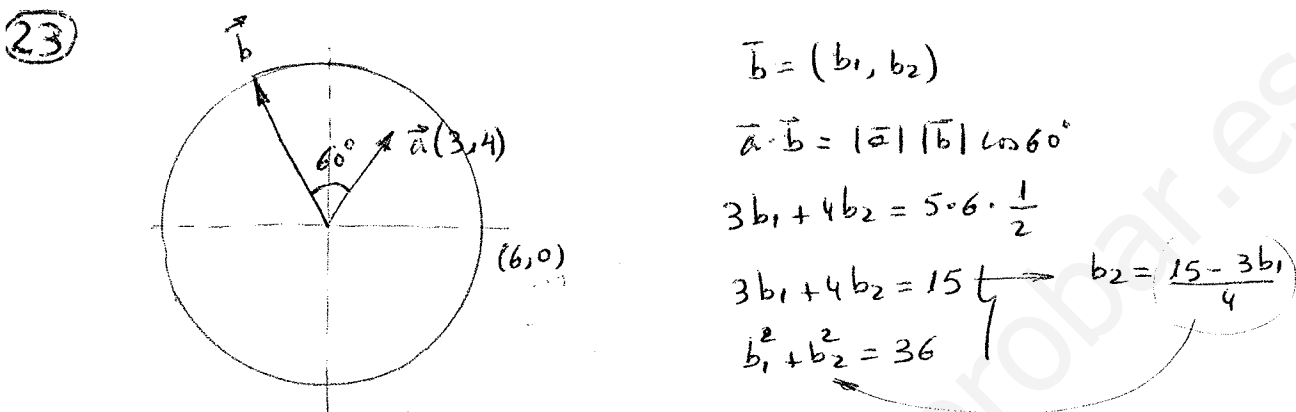
$$\frac{5}{\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{x}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2}$$

$$x = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2} - 10}{\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3} - 20}{3 + 4\sqrt{3}} = \frac{(15\sqrt{3} - 20)(3 - 4\sqrt{3})}{(3 + 4\sqrt{3})(3 - 4\sqrt{3})} = \frac{45\sqrt{3} - 180 - 60 + 20\sqrt{3}}{9 - 48} = \frac{125\sqrt{3} - 240}{-39} = \frac{240 - 125\sqrt{3}}{39}$$
 ✓

21) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 \quad |\vec{a}| = 2 \quad |\vec{b}| = 12$
 $(3\vec{a} - \vec{b})^2 = 9\vec{a} \cdot \vec{a} - 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b} = 9|\vec{a}|^2 - 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 36 - 96 + 144 = \boxed{84}$
 $(4\vec{a} + 5\vec{b})(4\vec{a} - 3\vec{b}) = 16\vec{a} \cdot \vec{a} - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 20\vec{b} \cdot \vec{a} - 25\vec{b} \cdot \vec{b} =$
 $= 16|\vec{a}|^2 - 25|\vec{b}|^2 = 16 \cdot 4 - 25 \cdot 144 = \boxed{-3536}$

22) $|\vec{a} + \vec{b}| = 8 \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 64 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 64$
 $|\vec{a} - \vec{b}| = 6 \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 36 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 36$

$$\frac{4\vec{a} \cdot \vec{b}}{4\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{28}{4\vec{a} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 7}$$



$b_1^2 + \frac{(15 - 3b_1)^2}{16} = 36 \quad ; \quad 16b_1^2 + 225 - 90b_1 + 9b_1^2 = 576$
 $25b_1^2 - 90b_1 - 351 = 0$

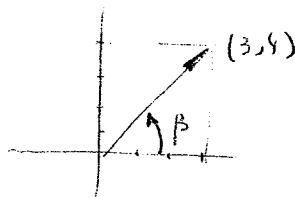
$b_1 = \frac{90 \pm \sqrt{8100 + 35100}}{50} = \frac{90 \pm 10\sqrt{432}}{50} = \frac{90 \pm 120\sqrt{3}}{50} = \frac{9 \pm 12\sqrt{3}}{5}$

Como \vec{b} pertenece al 2º cuadrante, eslojo la solución negativa:

$b_1 = \frac{9 - 12\sqrt{3}}{5} \Rightarrow b_2 = \frac{15 - 3 \cdot \frac{9 - 12\sqrt{3}}{5}}{4} = \frac{75 - 27 + 36\sqrt{3}}{20} =$
 $= \frac{48 + 36\sqrt{3}}{20} = \frac{12 + 9\sqrt{3}}{5}$
 $\boxed{\vec{b} = \left(\frac{9 - 12\sqrt{3}}{5}, \frac{12 + 9\sqrt{3}}{5} \right)} = \boxed{(-2'357, 5'518)}$

Otra forma:

$\tan \beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = 53,13^\circ$



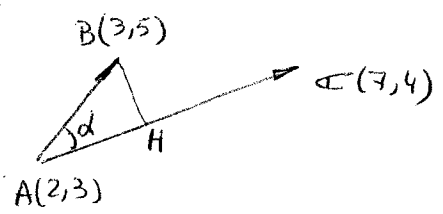
Hoy que generamos $6 + 0i$ un ángulo de $60 + 53,13^\circ = 113,13^\circ$

$b_1 + ib_2 = (6 + 0i) \cdot \frac{1}{6} \angle_{113,13^\circ} = \frac{6}{6} (\cos 113,13^\circ + i \sin 113,13^\circ) =$
 $= -2'357 + i 5'518$

$\boxed{\vec{b} = (-2'357, 5'518)}$

Otra forma: $\vec{b} = (3 + 4i) \cdot \left(\frac{6}{5}\right)_{60^\circ} = (3 + 4i) \cdot \frac{6}{5} (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{6}{5} (3 + 4i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
 $= \frac{6}{5} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{4}{2}i - \frac{4\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{5} (3 - 4\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} + 4)) \Rightarrow \boxed{\vec{b} = \left(\frac{9 - 12\sqrt{3}}{5}, \frac{9\sqrt{3} + 12}{5}\right)}$

24



$$\vec{AB} = (1,2) \quad \vec{AC} = (5,1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(1,2) \cdot (5,1)}{\sqrt{1+4} \sqrt{25+1}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \Rightarrow \alpha = 52^\circ$$

$$|\vec{AH}| = |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{1+4} \cdot \frac{7}{\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{7}{26}} = 1.373$$

$$H = A + \frac{|\vec{AH}|}{|\vec{AC}|} \vec{AC} = (2,3) + \frac{7/\sqrt{26}}{\sqrt{26}} (5,1) = (2,3) + \frac{7}{26} (5,1) = (2 + \frac{35}{26}, 3 + \frac{7}{26}) = (\frac{87}{26}, \frac{85}{26}) = (3.346, 3.269)$$

Otro método:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = 5y-15 \\ -5x+15 = y-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-5y+13=0 \\ -5x-y+20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-25y+65=0 \\ -5x-y+20=0 \end{cases}$$

$$-26y+85=0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{85}{26} \\ x = \frac{87}{26} \end{cases}$$

25

Recta BF'

$$\vec{BF'} = (3,-2) \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$y-6 = -\frac{2}{3}(x-4)$$

$$3y-18 = -2x+8$$

$$y = \frac{26-2x}{3}$$

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{26}{3} \quad \boxed{S(0, \frac{26}{3})}$$

Recta AF

$$\vec{AF} = (3,5) \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

$$y-1 = \frac{5}{3}(x-4)$$

$$3y-3 = 5x-20$$

$$y = \frac{5x-17}{3}$$

$$x=0 \Rightarrow y = -\frac{17}{3} \quad \boxed{P(0, -\frac{17}{3})}$$

$$\boxed{R(0,6)}$$

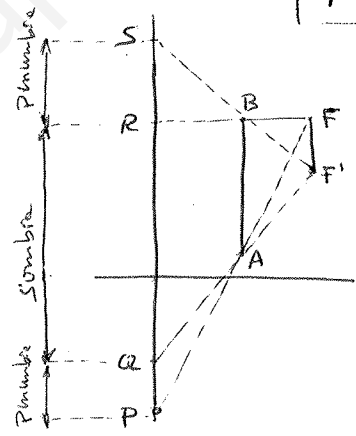
Recta AF'

$$\vec{AF'} = (3,3) \rightarrow m = 1$$

$$y-1 = 1 \cdot (x-4)$$

$$y = x-3$$

$$x=0 \rightarrow y = -3 \quad \boxed{Q(0, -3)}$$



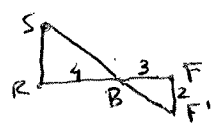
$$\text{Sombra} = 6+3 = \boxed{9 \text{ unidades}}$$

$$\text{Pénombra}_1 = \frac{26}{3} - 6 = \frac{8}{3}$$

$$\text{Pénombra}_2 = \frac{17}{3} - 3 = \frac{8}{3}$$

$$\text{Pénombra} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3} \text{ unidades}}$$

Otro método (Tals):



$$\frac{RS}{4} = \frac{2}{3} \rightarrow RS = \frac{8}{3} \checkmark$$

26

a) $\vec{CB} = \vec{B} - \vec{C}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{B} + \vec{C}$
↑
porque AB es un diametro

b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = (\vec{B} + \vec{C})(\vec{B} - \vec{C}) = \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{B} - \vec{C} \cdot \vec{C} =$
 $= |\vec{B}|^2 - |\vec{C}|^2 = R^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{CB} \Rightarrow \angle C = 90^\circ$

27

$\vec{v} = 6\vec{i} - 8\vec{j} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10$

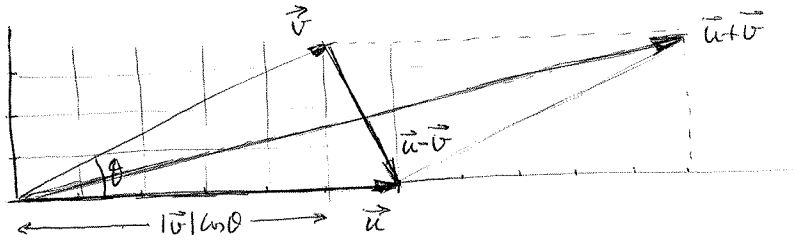
Vectores Paralelos:

$\pm \frac{15}{10} \vec{v} = \pm \frac{3}{2} \vec{v} = \pm \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{cases} 9\vec{i} - 12\vec{j} \\ -9\vec{i} + 12\vec{j} \end{cases}$

Vectores Perpendiculares

$\pm \frac{15}{10} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \pm \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{cases} 12\vec{i} + 9\vec{j} \\ -12\vec{i} - 9\vec{j} \end{cases}$

28



b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta = 6 \cdot 5 = 30$

29

$\vec{OA} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{OB} \perp \vec{CA} \Rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{OC} = 0 \checkmark$