Tipo I: Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

1. Si $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2}$ y α es del cuarto cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

[sol] $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\sec \alpha = \frac{5\sqrt{21}}{21}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

2. Si $\cos \alpha = -0{,}76$ y α es del segundo cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

[sol] $\sec \alpha = -1{,}32$; $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}65$; $\operatorname{cosec} \alpha = 1{,}54$; $\operatorname{tg} \alpha = -0{,}86$; $\operatorname{cotg} \alpha = -1{,}17$.

3. [S] De un ángulo α del primer cuadrante se conoce que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Calcula el valor exacto de:

a) $\operatorname{tg} \alpha$ b) $\operatorname{sen} (2\alpha)$

[sol] a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

4. Si $\operatorname{cotg} \alpha = -2$ y $\operatorname{sen} \beta = 4\cos \beta$ calcula:

a) $\operatorname{tg} 2\alpha$ b) $\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$

[sol] a) –4/3; b) 9/2

5. Calcula las razones del ángulo $\alpha + \beta$ sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

[sol] $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \frac{-1 + \sqrt{120}}{12}$; $\cos (\alpha + \beta) = \frac{-\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12}$; $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{15} - 15\sqrt{8}}{15 + \sqrt{120}}$

6. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ b) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ c) $\cos (\pi + \alpha)$ d) $\operatorname{tg} (\pi - \alpha)$

[sol] a) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, b) $\sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}}$; c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

7. Sin utilizar calculadora, determina el valor numérico de la expresión:

$\frac{2}{5} \operatorname{sen} 330^{\circ} - \frac{1}{4} \operatorname{tg} 135^{\circ} + 2 \cos 270^{\circ} - \frac{1}{6} \operatorname{tg} 240^{\circ}$.

[sol] $\frac{3 - 10\sqrt{3}}{60}$

8. Calcula el valor numérico de la expresión $\cos \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$.

[sol] 1

Tipo II: Identidades. Fórmulas de adición y transformación

9. Demuestra que:

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

b) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha$

10. Comprueba las siguientes identidades:

a) $\text{cotg}\ \alpha-\dfrac{\text{cotg}^2\alpha-1}{\text{cotg}\ \alpha}=\text{tg}\ \alpha$ b) $\dfrac{\text{sen}\ \alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\dfrac{\text{tg}\ \alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

11. Comprueba la identidad: $\dfrac{1-\text{tg}\ \alpha}{1+\text{tg}\ \alpha}=\dfrac{1-\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

12. ¿Es cierta la igualdad $\dfrac{\text{tg}\ \alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}=\sec\alpha+\text{tg}\ \alpha$?

[sol] No.

Tipo IV: Ecuaciones y sistemas trigonométricos

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 2 sen 2x = 1 b) 3 tg 2x = $\sqrt{3}$ c) 3 cos $\dfrac{x}{2}$ = 1,5 d) 5 sen 4x = 0

[sol] a) $x=\begin{cases}15^\circ+k\cdot180^\circ\\75^\circ+k\cdot180^\circ\end{cases}$; b) $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\cdot\pi}{2}$; c) $x=\begin{cases}120^\circ+k\cdot720^\circ\\600^\circ+k\cdot720^\circ\end{cases}$; d) $x=0+k\cdot\dfrac{\pi}{4}$.

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\text{sen}\left(45^\circ+x\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[sol] a) $x=\begin{cases}k\cdot2\pi\\\dfrac{5\pi}{3}+k\cdot2\pi\end{cases}$; b) $x=\begin{cases}180^\circ+k\cdot360^\circ\\270+k\cdot360^\circ\end{cases}$

15. Resuelve la ecuación: cos x = sen 2x

[sol] x = 90º + k·180º; x = 30º + k·360º; x = 150º + k·360º $(k\in Z)$.

16. Resuelve la ecuación: $tg\ x=\sqrt{2}\cos x$

[sol] x = 45º + k·360º; x = 135º + k·180º $(k\in Z)$.

17. Resuelve la ecuación: tg 2x = –tg x

[sol] x = 0º + k·180º; x = 60º + k·180º; x = 120º + k·180º, $(k\in Z)$

18. Resuelve la ecuación: sen 2x cos x = 3 sen^2 x

[sol] x = 30º + k·360º; x = 150º + k·360º; $(k\in Z)$