

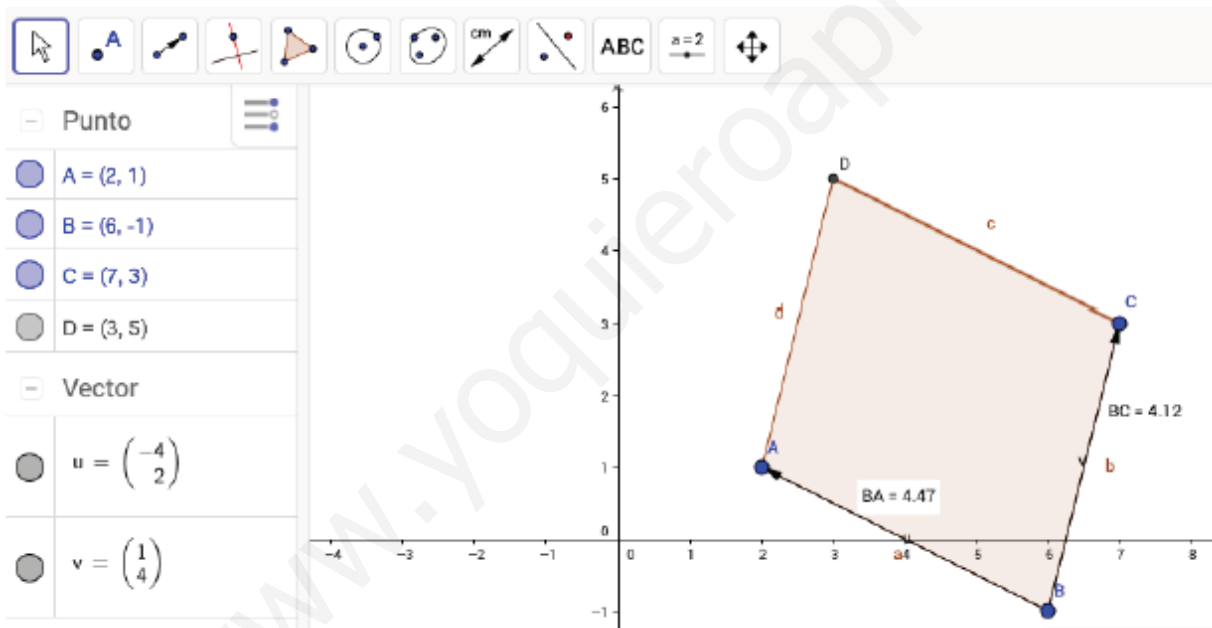
Examen Geometría Analítica (vectores)

Instrucciones para el examen:

- Expresa los resultados con fracciones y radicales siempre que sea posible. En caso de usar decimales, redondea a la centésima.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de las propiedades que se están aplicando. Tan importante como los resultados es el proceso, explícalo claramente.
- Puedes hacer las preguntas en el orden que quieras pero sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuidadoso/a con la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. **(2,5 puntos)** Dados los puntos de coordenadas $A(2, 1)$, $B(6, -1)$ y $C(7, 3)$.
- (1 punto)** Demostrar que no están alineados y que por tanto se pueden considerar los vértices de un paralelogramo.
 - (0,5 puntos)** Representar dichos vértices en el plano cartesiano y calcular las coordenadas del cuarto vértice D , sabiendo que es el opuesto al vértice B . Hacerlo analíticamente y comprobarlo gráficamente.
 - (1 punto)** Averiguar cuál es el perímetro del paralelogramo $ABCD$ calculando el módulo de los vectores que consideres necesario.

SOLUCIÓN:



0,8 p a) $\vec{u} = \vec{BA} = (2-6, 1-(-1)) = (-4, 2) \rightarrow |\vec{BA}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$
 $\vec{v} = \vec{BC} = (7-6, 3-(-1)) = (1, 4) \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$

$\frac{-4}{1} \neq \frac{2}{4}$ Como las coordenadas no son proporcionales,

los vectores no son linealmente dependientes y por tanto los puntos no están alineados

0,6 p b) En el dibujo: $D = (d_x, d_y)$ \vec{CD} equipotente a \vec{BA}
 $\vec{CD} = (d_x - 7, d_y - 3) = (-4, 2) \Rightarrow \begin{cases} d_x - 7 = -4 \Rightarrow d_x = -4 + 7 = 3 \\ d_y - 3 = 2 \Rightarrow d_y = 2 + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow D(3, 5)$

0,6 p d) Perímetro $ABCD = 2|\vec{BA}| + 2|\vec{BC}| = 2\sqrt{20} + 2\sqrt{17} \approx 2 \cdot 4,47 + 2 \cdot 4,12 = 17,18 u$

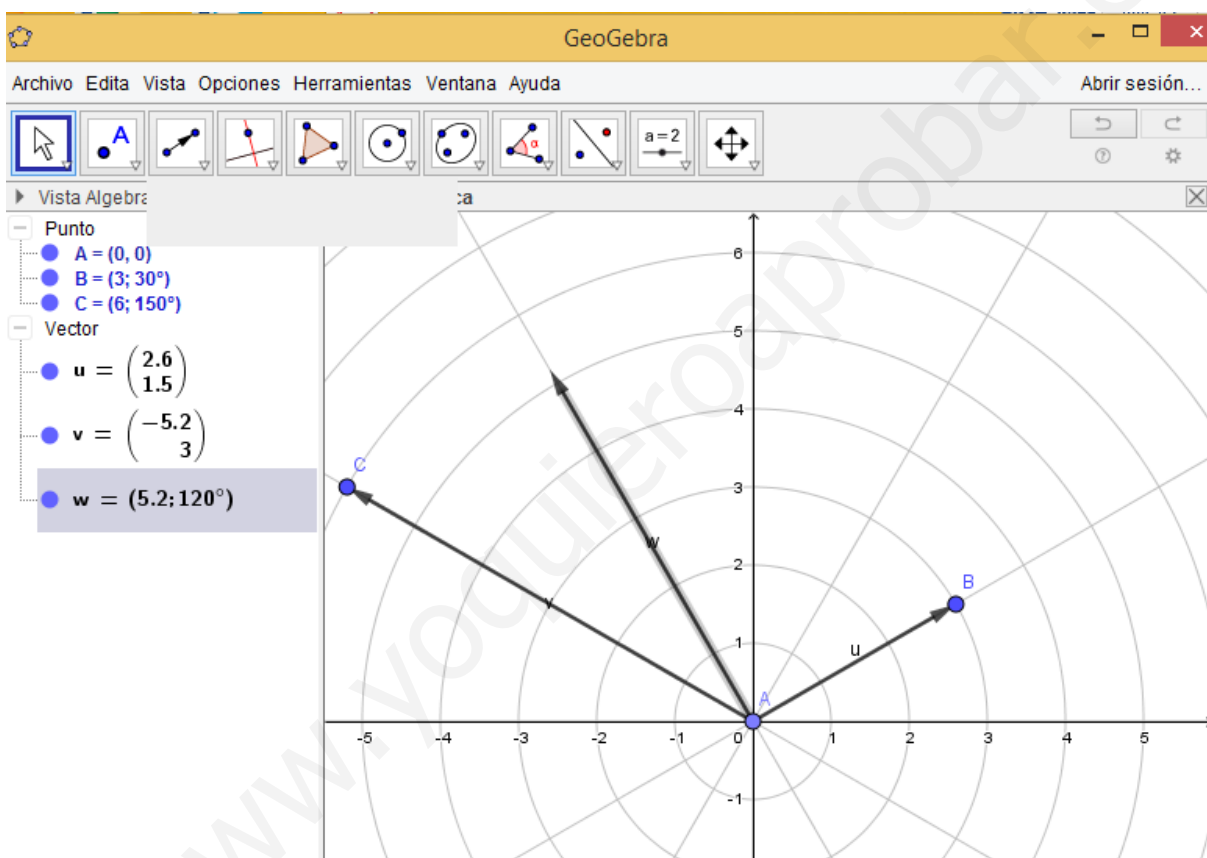
Planteamiento: 0,25
Cada vector: 0,25
Solución: 0,25

Dibujo: 0,25
Analítico: 0,25
Gráfico: 0,25

Módulos: 0,25 · 2
Perímetro: 0,25
Solución: 0,25

2. (2 puntos) Dos vectores cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas, tienen por módulos 3 y 6 respectivamente, y forman con el semieje positivo de las abscisas ángulos de 30° y 150° . Se calcula el vector resultante de la suma de ambos vectores y se pide:
- Su módulo
 - El ángulo que forma dicho vector resultante con el eje positivo de las abscisas.

SOLUCIÓN:



Se pasan u y v a coordenadas cartesianas para poderlo sumar.

$$\vec{u} = (3 \cdot \cos 30^\circ, 3 \cdot \sin 30^\circ) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) = (2'6, 1'5)$$

$$\vec{v} = (6 \cdot \cos 150^\circ, 6 \cdot \sin 30^\circ) = \left(-\frac{6\sqrt{3}}{2}, \frac{6}{2} \right) = (-3\sqrt{3}, 3) = (-5'2, 3)$$

Después se suma y se pasa el vector resultante a polares, calculando para ello su módulo y su argumento:

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) + (-3\sqrt{3}, 3) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) + \left(-\frac{6\sqrt{3}}{2}, \frac{6}{2} \right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2} \right) = (-2'6, 4'5)$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27} = 5,2$$

$$\arctg\left(\frac{\frac{9}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) = \arctg\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right) = 120^\circ$$

Pasar a cartesianas: 0,4·2
Suma bien: 0,2
Módulo: 0,5
Argumento: 0,5

3. (2 puntos) Dados los vectores $\vec{a}(2m - 3, -8)$ y $\vec{b}(-10, 5m - 4)$, hallar los valores del parámetro "m" para que:

- Ambos vectores son linealmente dependientes.
- Ambos vectores sean perpendiculares.

SOLUCIÓN:

a)

Para que sean linealmente dependientes, sus componentes deben ser proporcionales.

$$\frac{2m-3}{-10} = \frac{-8}{5m-4} \Rightarrow (2m-3)(5m-4) = (-8) \cdot (-10)$$

$$10m^2 - 8m - 15m + 12 = 80 \Rightarrow 10m^2 - 23m - 68 = 0$$

$$m = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-68)}}{2 \cdot 10} = \frac{23 \pm \sqrt{529 + 2720}}{20} = \frac{23 \pm \sqrt{3249}}{20} = \frac{23 \pm 57}{20} = \begin{cases} x_1 = \frac{80}{20} = 4 \\ x_2 = -\frac{34}{20} = -1,7 \end{cases}$$

Cada apartado:
Planteamiento: 0,5
Cálculos: 0,5

b) Para que sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -20m + 30 - 40m + 32 = -60m + 62 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$$

4. (2 puntos) Expresar el vector $\vec{w}(10, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}(2, 3)$ y $\vec{v}(-4, 2)$ y representar gráficamente.

Para que \vec{w} sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , debo encontrar dos escalares a y b tales que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (10, 3) = a(2, 3) + b(-4, 2) = (2a, 3a) + (-4b, 2b) =$$

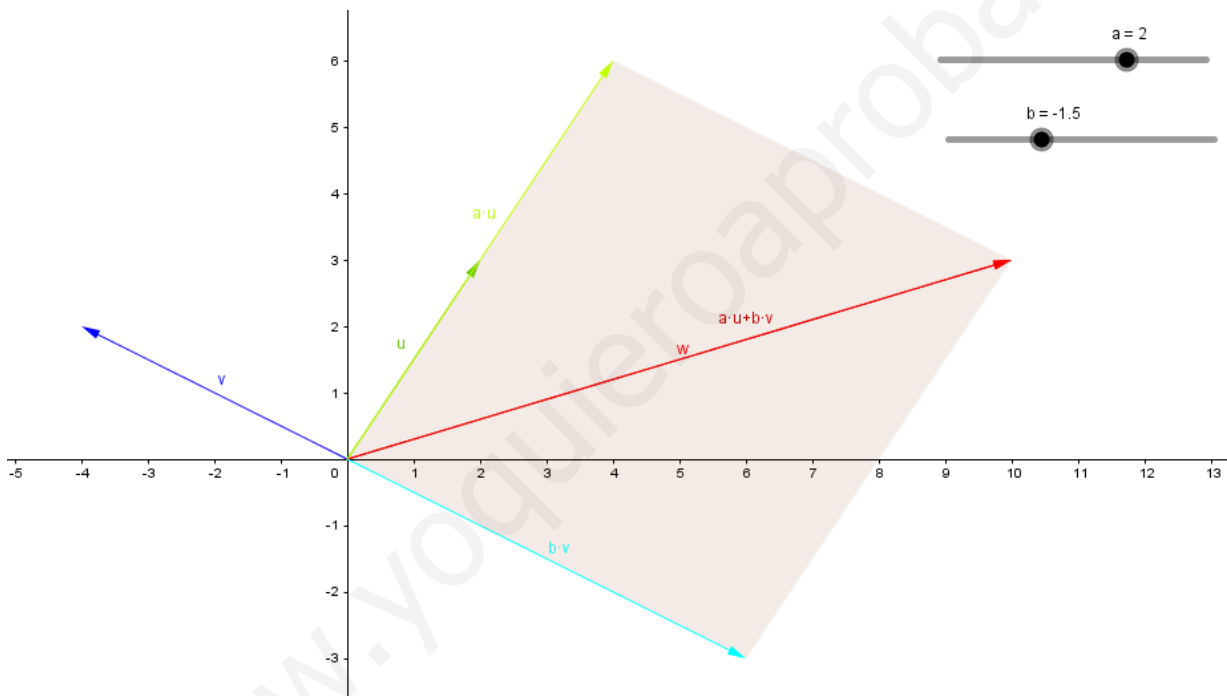
$$(10, 3) = (2a - 4b, 3a + 2b) \Rightarrow \begin{cases} 10 = 2a - 4b \Rightarrow 5 = a - 2b \Rightarrow a = 5 + 2b \\ 3 = 3a + 2b \Rightarrow 3 = 3(5 + 2b) + 2b = 15 + 6b + 2b \end{cases}$$

$$\boxed{a = 2 \quad b = -\frac{3}{2}}$$

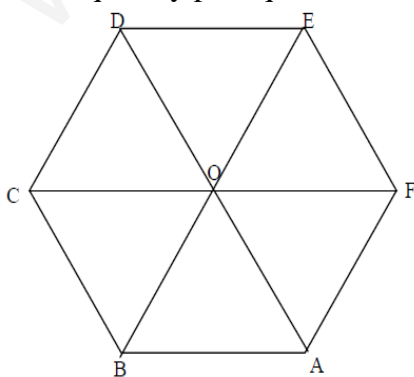
$$3 = 15 + 8b \Rightarrow b = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

$$a = 5 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 5 - 3 = 2$$

Planteamiento: 0,5
Cálculos: 1
Gráfica: 0,5



5. (1 punto) Observa la imagen y completa con escalares (que pueden ser ceros) los huecos que hay para que sean ciertas las siguientes combinaciones lineales de vectores.



$$\vec{AF} = (-1) \cdot \vec{OB} + 0 \cdot \vec{CO}$$

$$\vec{CF} = 2 \cdot \vec{DO} + 2 \cdot \vec{BO}$$

$$\vec{BE} = 2 \cdot \vec{CO} + 2 \cdot \vec{OD}$$

$$\vec{DE} = (-1) \cdot \vec{OB} + (-1) \cdot \vec{FE}$$

$$\vec{BE} = (-2) \cdot \vec{OB} + 0 \cdot \vec{CO}$$