03886

Matemáticas I - 1º de Bachillerato

Segundo Examen de la Primera Evaluación

1. Utiliza el Binomio de Newton para desarrollar la potencia $\left(\frac{1}{\sqrt{2x}} + 2\sqrt{x}\right)^4$ y simplifica en lo posible el resultado. (**1 punto**)

2. Resuelve la siguiente ecuación y el siguiente sistema de ecuaciones:

   a) $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{2-\dfrac{x-1}{x+1}} = 2$ (**1 punto**)

   b) $\begin{cases} \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{x} = -1 \\ \dfrac{5(x-2)}{3} - \dfrac{3(y+1)}{2} = x - 7 \end{cases}$

3. *Para resolver el siguiente problema es obligatorio declarar la o las incógnitas y plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones:*
   Una señora paga por una figura de cerámica y una lámpara 1000 euros. Si le hubieran hecho un descuento del 25 % en la figura y del 30 % en la lámpara se hubiera ahorrado 285 euros. ¿Cuánto pagó por cada objeto? (**1 punto**)

4. Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) Sabiendo que $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$, halla $\cos 2760^{\circ}$. (**0,5 puntos**)

   b) Sabiendo que el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, calcular $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$ (*hacer el ejercicio con fracciones y dar el resultado en forma de fracción*). (**0,5 puntos**)

   c) Sabiendo que $\cos \alpha = 0,7$ y que α es agudo, halla de manera razonada y sin calcular previamente el ángulo α:

      - $\cos(90^{\circ} + \alpha)$. (**0,5 puntos**)
      - $\operatorname{sen}\,(180^{\circ} - \alpha)$. (**0,5 puntos**)

5. Un avión vuela en línea horizontal hacia el este. Desde un punto situado en el suelo, al Sur del avión, se ve a éste bajo un ángulo de 45º. Cuando el avión ha volado 1.000 metros, desde ese mismo punto se le ve con un ángulo de elevación de 30º. ¿Cuál es la altura de vuelo? (**2 puntos**)

6. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 50 cm y los ángulos iguales miden, cada uno, 40º. Determina el perímetro, tercer ángulo y área de ese triángulo. (**2 puntos**)

Soluciones

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}+2\sqrt{x}\right)^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^4+4\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^3(2\sqrt{x})+6\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2(2\sqrt{x})^2+4\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)(2\sqrt{x})^3+$
$+(2\sqrt{x})^4=\frac{1}{4x^2}+\frac{8\sqrt{x}}{2x\sqrt{2x}}+\frac{24x}{2x}+\frac{32x\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}+16x^2=\frac{1}{4x^2}+\frac{8\sqrt{2}x}{4x^2}+12+\frac{32\sqrt{2}x^2}{2x}+16x^2=$
$=\frac{1}{4x^2}+\frac{2\sqrt{2}}{x}+12+16\sqrt{2}x+16x^2$

2. a) $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{2-\dfrac{x-1}{x+1}}=2\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{x-1+x+1}{x-1}}{\dfrac{2x+2-x+1}{x+1}}=2\Leftrightarrow\dfrac{2x(x+1)}{(x+3)(x-1)}=2\Leftrightarrow 2x(x+1)=2(x^2+2x-3)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2+2x=2x^2+4x-6\Leftrightarrow -2x=-6\Leftrightarrow x=3$

b) $\begin{cases}\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{x}=-1\\ \dfrac{5(x-2)}{3}-\dfrac{3(y+1)}{2}=x-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-xy\\ 10x-20-9y-9=6x-42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-xy\\ 4x-9y=-13\end{cases}$

De la segunda ecuación, despejando x, se tiene $x=\dfrac{9y-13}{4}$. Sustituyendo este valor en la primera:

$$2\frac{9y-13}{4}+3y=-\frac{9y-13}{4}y\Leftrightarrow 18y-26+12y=-9y^2+13y\Leftrightarrow 9y^2+17y-26=0,$$

ecuación de segundo grado cuyo discriminante es $\Delta=17^2-4\cdot 9\cdot(-26)=289+936=1225$. Por tanto:

$$y=\frac{-17\pm 35}{18}=\begin{cases}y_1=\dfrac{18}{18}=1\Rightarrow x_1=\dfrac{9-13}{4}=-1\\ y_2=\dfrac{-52}{18}=\dfrac{-26}{9}\Rightarrow x_2=\dfrac{-26-13}{4}=\dfrac{-39}{4}\end{cases}$$

3. Llamemos x al precio de la figura de cerámica, e y al precio de la lámpara. Entonces, según el enunciado:
$\begin{cases}x+y=1000\\ x-\dfrac{25}{100}x+y-\dfrac{30}{100}y=1000-285\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1000\\ 75x+70y=71500\end{cases}$

De la primera ecuación: $x=1000-y$. Sustituyendo en la segunda: $75\cdot(1000-y)+70y=71500\Leftrightarrow$ $75000-75y+70y=71500\Leftrightarrow -5y=-3500\Leftrightarrow y=700$.
Por tanto por la lámpara pagó $y=700$ euros y por la figura de cerámica $x=1000-700=300$ euros.

4. a) Dividiendo 2760^{o} entre 360^{o} se obtiene: $2760^{\text{o}} = 7 \cdot 360^{\text{o}} + 240$. Por tanto $\cos 2760^{\text{o}} = \cos 240^{\text{o}} = -\cos 60^{\text{o}} = -\frac{1}{2}$ ($\cos 240^{\text{o}} = -\cos 60^{\text{o}}$ porque 240^{o} y 60^{o} se diferencian en 180^{o}).

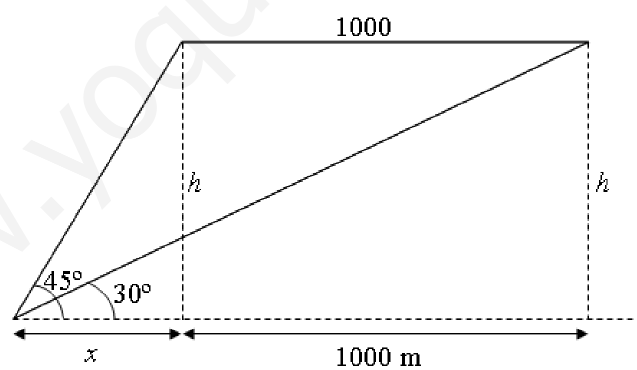
   b) $\operatorname{tg}\alpha = -2 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = -2\cos\alpha \Leftrightarrow (-2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
   Tomamos la solución negativa porque el ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante.
   Entonces $\operatorname{sen}\alpha = -2\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

   c) Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, entonces $\operatorname{sen}^2\alpha + 0{,}7^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}49 = 0{,}51 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0{,}71$. Así pues:

   - α y $90^{\text{o}} + \alpha$ se diferencian en 90^{o}. Por tanto $\cos(90^{\text{o}} + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = -0{,}71$.
   - $180^{\text{o}} - \alpha$ y α son suplementarios. Por tanto: $\operatorname{sen}(180^{\text{o}} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = 0{,}71$.

5. Observando el dibujo en el que se representa la situación planteada en el enunciado, y tomando los triángulos rectángulos adecuados, se tiene:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 45^{\text{o}} = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 30^{\text{o}} = \dfrac{h}{1000 + x} \end{cases}$$



Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 45^{\text{o}} = 1$ y que $\operatorname{tg} 30^{\text{o}} = 0{,}58$; despejando h e igualando se obtiene:

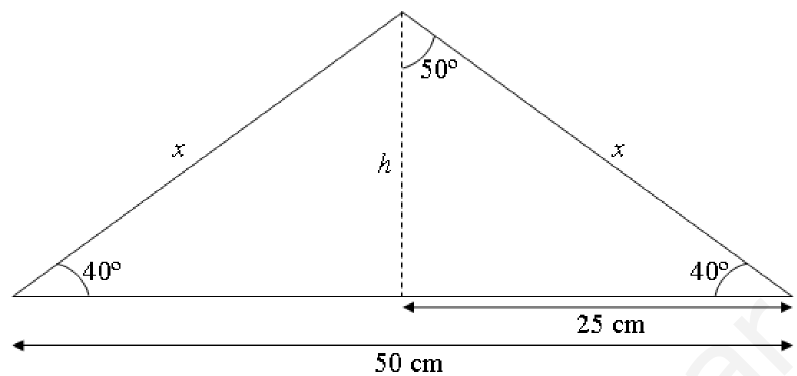
$$1x = 0{,}58(1000 + x) \Leftrightarrow x = 580 + 0{,}58x \Leftrightarrow 0{,}42x = 580 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1380{,}95 \text{ m.}$$

Sustituyendo se obtiene h:

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 45^{\text{o}} = x \cdot 1 = x \Rightarrow h = 1380{,}95 \text{ m.}$$

6. Obsérvese la figura que se ha realizado con los datos que nos proporciona el enunciado:



Entonces:

$$\operatorname{sen} 50^{\circ} = \frac{25}{x} \Leftrightarrow x = \frac{25}{\operatorname{sen} 50^{\circ}} \Leftrightarrow x = 32{,}64 \text{ cm.}$$

$$\operatorname{tg} 40^{\circ} = \frac{h}{25} \Leftrightarrow h = 25 \operatorname{tg} 40^{\circ} \Leftrightarrow h = 20{,}98 \text{ cm.}$$

Es claro que el tercer ángulo es $180^{\circ} - 40^{\circ} - 40^{\circ} = 100^{\circ}$ (por eso el ángulo superior de la figura es 50°).

El perímetro P del triángulo es:

$$P = x + x + 50 = 32{,}64 + 32{,}64 + 50 = 115{,}28 \text{ cm.}$$

Y el área A del triángulo es:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{50 \cdot h}{2} = \frac{50 \cdot 20{,}98}{2} = 524{,}5 \text{ cm}^2.$$