Examen de Trigonometría (1º Bachillerato de Ciencias)

1. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=30º**.** Calcular los demás datos del triángulo. Calcular el área del triángulo. **(1.5 puntos)**

Solución:

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$) → $100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(30º)$

$c^2-20\sqrt{3}c+300=0$ → $c=10\sqrt{3}$ (doble)

Si $c=10\sqrt{3}$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$) → $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$

$$\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen(30)}{10}\right)=90º \rightarrow \hat{C}=60º$$

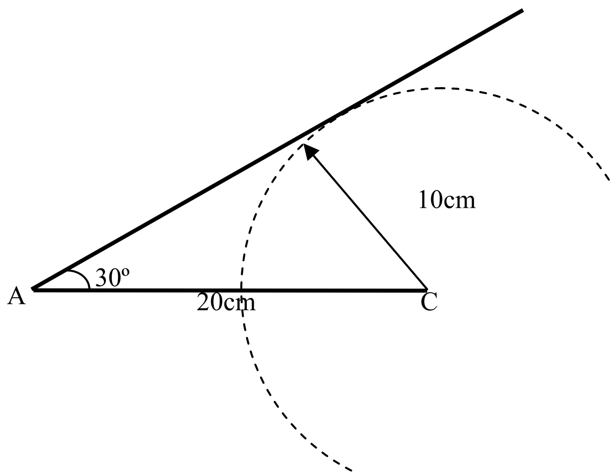
Opción 2

Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$) → $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen30}{10}\right)=90º$

$\hat{C}=60º$.

Teorema del coseno para calcular c: $c^2=b^2+a^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c=10\sqrt{3}$

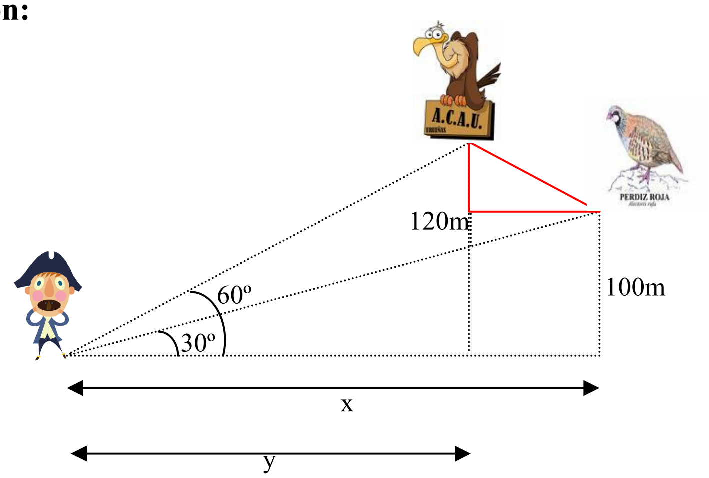
Gráficamente



Área: como es rectángulo un cateto es la base y el otro la atura area=$\frac{10\cdot 10\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$ cm^2

2. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60º. En la misma dirección pero formando un ángulo de 30º vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están? **(1.5 puntos)**

Solución:



Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide 5km-3km=2km. El otro es y-x. Calculémoslo:

tg(30)=100/x → x=100/tg(30)=$100\cdot\sqrt{3}$ m

tg(60º)=120/y → y=120/tg(60º)=$40\cdot\sqrt{3}$ m

Así la distancia entre las dos aves definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 20m y de (x-y)=$60\cdot\sqrt{3}$ m→ d=$\sqrt{20^2+(60\sqrt{3})^2}=105.8\,m$ → se come la peerdiz.

3. Calcular sin utilizar la calculadora el resto de razones trigonoméricas (seno, coseno) de α, sabiendo que tg(α)=1/2 y $\alpha\in 3^{er}$ cuadrante. **(0.75 puntos)**

Solución:

$$1+tg^2(\alpha)=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\to\frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\to\cos^2(\alpha)=\frac{4}{5}\to\cos(\alpha)=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\xrightarrow{3er\ cuad}\cos(\alpha)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\to sen(\alpha)=tg(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

4. Resolver: **(4 puntos)**

a. $6\cdot\cos^2(x/2)+\cos(x)=1$

b. $\mathrm{sen}(x)+\cos(x)=\sqrt{2}$

c. $\begin{cases} sen(x)+sen(y)=1 \\ x+y=\pi \end{cases}$

d. $\begin{cases} sen(x)+sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen(x)-sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

Solución

a)

$$6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)=1 \to 6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1 \to 8\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4} \to \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{1}{2} \to \left(\frac{x}{2}\right)=\begin{cases} 60^\circ+360^\circ k \\ 300^\circ+360+360^\circ k \\ 120^\circ+360^\circ k \\ 240^\circ+360^\circ k \end{cases} \to x=\begin{cases} 120^\circ+720k \\ 600^\circ+720^\circ k \\ 240^\circ+720^\circ k \\ 480^\circ+720k \end{cases} \to x=\begin{cases} 120^\circ+720k \\ 240^\circ+720k \end{cases}$$

b)

$\mathrm{sen}(x)+\cos(x)=\sqrt{2}$ → $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot sen(x)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(x)=1 \to \cos(45)\cdot sen(x)+sen(45)\cdot\cos(x)=1$

→ $sen(x+45^\circ)=1 \to x+45^\circ=90^\circ \to x=45^\circ+360k$

c) $x=\pi-y$ → $\mathrm{sen}(\pi-y)+\mathrm{sen}(y)=1$ → $\mathrm{sen}(y)+\mathrm{sen}(y)=1$ → $\mathrm{sen}(y)=1/2$ →

$$\begin{cases} y=60^\circ+360^\circ k=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \to x=\dfrac{2\pi}{3}-2\pi k \\ y=120^\circ+360^\circ k=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \to x=\dfrac{\pi}{3}-2\pi k \end{cases}$$

d) $\begin{cases} sen(x)+sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen(x)-sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} X+Y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ X-Y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to x=\begin{cases} 60^\circ+360^\circ k \\ 120^\circ+360^\circ k \end{cases} \\ Y=\dfrac{1}{2} \to y=\begin{cases} 30^\circ+360^\circ k \\ 150^\circ+360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

5. Demostrar: **(1.5 puntos)**

a) cos(x+y+z)=cos(x)·cos(y)·cos(z)-cos(x)·sen(y)·sen(z)-sen(x)·cos(y)·sen(z)-sen(x)·sen(y)·cos(z)

b) $\dfrac{sen^2(2a)}{(1-\cos^2 a)\cdot\cos(a)} = 4\cdot\cos(a)$

Solución:

a)

$$\cos(x+(y+z)) = \cos(x)\cdot\cos(y+z) - sen(x)\cdot sen(y+z) = \cos(x)\cdot\big(\cos(y)\cdot\cos(z) - sen(y)\cdot sen(z)\big) -$$
$$- sen(x)\cdot\big(sen(y)\cdot\cos(z) + \cos(y)\cdot sen(z)\big) =$$
$$= \cos(x)\cos(y)\cos(z) - \cos(x)sen(y)sen(z) - sen(x)sen(y)\cos(z) - sen(x)\cos(y)sen(z)$$

b) $$\frac{sen^2(2a)}{(1-\cos^2 a)\cdot\cos(a)} = \frac{\big(2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\big)^2}{sen^2 a\cdot\cos(a)} = \frac{4sen^2(a)\cdot\cos^2(a)}{sen^2(a)\cdot\cos(a)} = 4\cdot\cos(a)$$