

1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

b) $4 \operatorname{sen} x + 2 \cos 2x = 3$

c) $\operatorname{cosec} x - \cotg x = \sqrt{3}$

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a)
$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ y + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \cos x - \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$$

3. Dado el triángulo ABC con $a = 1$ m, $B = 30^\circ$ y $C = 45^\circ$:

a) Resuelve el triángulo.

b) Calcula su área.

$$\frac{\cotg 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\sec 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ}$$

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:

a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado:

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión

Soluciones

1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

Por un lado:

$$\cos 4x = \cos(3x+x) = \cos 3x \cdot \cos x - \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$$

y, por otro:

$$\cos 2x = \cos(3x-x) = \cos 3x \cdot \cos x + \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cdot \cos x$$

Entonces la ecuación que hemos de resolver es equivalente a:

$$2 \cos 3x \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \cos 3x - 1) = 0$$

Hay dos posibilidades.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{2} + k\pi$).
- $2 \cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 60^\circ + 360^\circ k$, o bien $3x = 300^\circ + 360^\circ k \Leftrightarrow x = 20^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{3} + \frac{2k}{3}$), o bien $x = 100^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{5\pi}{9} + \frac{k}{3}$).

b) $4 \operatorname{sen} x + 2 \cos 2x = 3 \Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x + 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x + 2(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow -4 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x - 1 = 0.$

Llamando $\operatorname{sen} x = t$, tenemos $-4t^2 + 4t - 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-4 \pm 4}{-8} = \frac{1}{2}. \text{ Así pues } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k, \text{ o bien } x = 120^\circ + 360^\circ k$$

(en radianes serían $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, o bien $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$).

c) $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3 - 3 \cos^2 x}. \text{ Elevando ambos miembros al cuadrado: } 1 - 2 \cos x + \cos^2 x = 3 - 3 \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0. \text{ Llamando } \cos x = t, \text{ tenemos } 2t^2 - t - 1 = 0,$$

ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- Si $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k$ (en radianes $x = 2k\pi$). Esta solución habría que descartarla pues $\operatorname{cosec} x$ y $\operatorname{cotg} x$ no están definidas para $x = 2k\pi$.

- Si $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$, o bien $x = 240^\circ + 360^\circ k$ (en radianes $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, o bien $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$). La segunda solución habría que descartarla pues:

$$\text{Por un lado, } \operatorname{cosec} 240^\circ = \frac{1}{\sin 240^\circ} = \frac{1}{-\sin 60^\circ} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Y, por otro lado, } \cotg 240^\circ = \cotg 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Así pues } \operatorname{cosec} 240^\circ - \cotg 240^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

Lo que ocurre es que al elevar al cuadrado lo signos se convierten a positivos.

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\text{a) } \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \sin x \cdot \sin y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

Como $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, y de la primera ecuación se deduce que

$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = 0$, entonces $\cos(x+y) = 0$. De la segunda ecuación $x = 30^\circ + y$. Por tanto

$$\cos(30^\circ + 2y) = 0 \Leftrightarrow 30^\circ + 2y = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} \Leftrightarrow 2y = \begin{cases} 60^\circ \\ 240^\circ \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} 30^\circ \\ 120^\circ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Como } x = 30^\circ + y \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ \\ 150^\circ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Por tanto hay dos parejas de soluciones $(x_1, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $(x, y_2) = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Recuérdese que las soluciones había que darlas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\text{b) } \begin{cases} y + \sin^2 x = 2 \\ y + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{c) } \begin{cases} \cos x \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$$

Observemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

De la misma manera, $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 y - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos^2 y = 1$.

Despejando de la primera ecuación y sustituyendo en esta última obtenemos:

$$2(1 - \cos y)^2 + 2\cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 2(1 + \cos^2 y - 2\cos y) + 2\cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0.$$

Haciendo $t = \cos y$, tenemos la ecuación $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ (la misma que aparece en el apartado b) del ejercicio 1), cuya solución es $t = \frac{1}{2}$. Entonces $\cos y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + 2\cos \alpha)}{2\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2\cos \alpha} = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\cos x + \cos y = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 - \cos y \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{3}$$

Tenemos pues dos parejas de soluciones: $(x_1, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $(x_2, y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

3. Recordemos que en el triángulo ABC , m , n y p .

a) En primer lugar $AB = m$.

$$\text{Por el teorema de los senos: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow b = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \Leftrightarrow b \approx 0,518 \text{ m.}$$

$$\text{Análogamente: } \frac{A=180^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{30^\circ \cdot 45^\circ}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow c = \frac{105^\circ \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \Leftrightarrow c \approx 0,732 \text{ m.}$$

b) Utilicemos una de las fórmulas conocidas para calcular el área del triángulo:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,518 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,183 \text{ m}^2.$$

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes: A

a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\frac{\cotg 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\sec 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ}$

$$\frac{\cotg 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\sec 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ} = \frac{\frac{\cos 150^\circ}{\sin 150^\circ} - \frac{1}{\sin 315^\circ}}{\frac{1}{\cos 120^\circ} - \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ}} = \frac{\frac{-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} - \frac{1}{-\sin 45^\circ}}{\frac{1}{-\cos 60^\circ} - \frac{-\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}} =$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2}}{\frac{1}{-1/2} - \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}} = \frac{-\sqrt{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (-2 + \sqrt{3})}{(-2 - \sqrt{3}) \cdot (-2 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4 - 3} = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 3$$

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(1 + 2\cos \alpha)\sin \alpha}{(1 + 2\cos \alpha)\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$