Examen de trigonometría

Ejercicio 1.

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo 60^o. Hallar el área y el perímetro del trapecio.

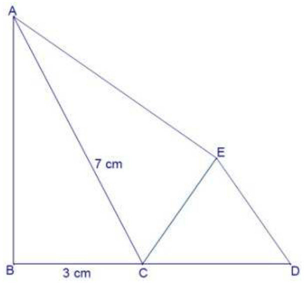
Ejercicio 2.

Resuelve la ecuación trigonométrica: $sen^2 2x - sen\,x \cdot cos\,x = \frac{1}{2}$

03845

Ejercicio 3.

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además ED=EC, BC= 3 cm, CA=7 cm. Hallar el área del triángulo CED.



Ejercicio 4.

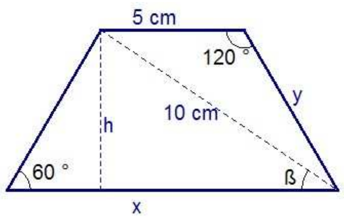
Si $cotg\alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determina, sin usar la calculadora, el valor de $cotg\, 2\alpha$, $tg\frac{\alpha}{2}$, $cos\left(\pi + 2\alpha\right)$ y $sen\, 4\alpha$.

03845

Soluciones

Ejercicio 1.

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo 60º. Hallar el área y el perímetro del trapecio.



Si el trapecio es isósceles $\Rightarrow$ *sus ángulos son iguales dos a dos y suplementarios entre ellos* $\Rightarrow$ *tendrá dos ángulos de* 60° *y otros dos de* 120°.

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado y:

$$10^2 = 5^2 + y^2 - 2\cdot 5\cdot y\cdot \cos 120^\circ \;\Rightarrow\; 100 = 25 + y^2 + 5y \;\Rightarrow\; y^2 + 5y - 75 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \frac{-5+5\sqrt{13}}{2}\ cm \quad (y \simeq 6{,}5\,cm)$$

Ahora aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo β *y después la base* x

$$\frac{10}{sen\,60^\circ} = \frac{y}{sen\,\beta} \;\Rightarrow\; sen\,\beta = \frac{y\cdot sen\,60^\circ}{10} \simeq 0{,}564 \;\Rightarrow\; \beta = arcsen(0{,}564) = 34{,}34^\circ \;\Rightarrow\; 180^\circ - 60^\circ - 34{,}34^\circ = 85{,}66^\circ$$

$$\frac{10}{sen\,60^\circ} = \frac{x}{sen\,85{,}66^\circ} \;\Rightarrow\; x = \frac{10\cdot sen\,85{,}66^\circ}{sen\,60^\circ} \;\Rightarrow\; x \simeq 11{,}5\,cm$$

Perímetro del trapecio $P \simeq 5 + 2\cdot 6{,}5 + 11{,}5 = 29{,}5\,cm$

$$sen\,60^\circ = \frac{h}{y} \;\Rightarrow\; h = y\cdot sen\,60^\circ \simeq 5{,}64 \;\;;\;\; A_{trapecio} = \frac{B+b}{2}\cdot h \;\Rightarrow\; A_{trapecio} \simeq \frac{11{,}5+5}{2}\cdot 5{,}64 = 46{,}53\ cm^2$$

Ejercicio 2.

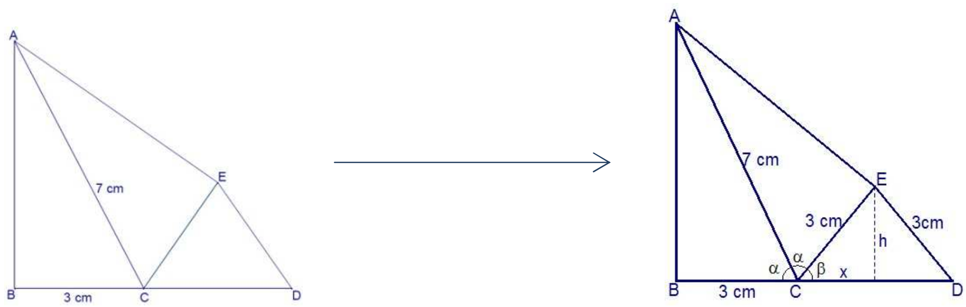
Resuelve la ecuación trigonométrica: $sen^2 2x - sen\,x\cdot cos\,x = \dfrac{1}{2}$

$$sen^2 2x - sen\,x\cdot cos\,x - \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2sen^2 2x - 2sen\,x\cdot cos\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2sen^2 2x - sen\,2x - 1 = 0 \quad (sen\,2x = t)$$

$$\Rightarrow\; 2t^2 - t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} sen\,2x = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 90^\circ \;\Rightarrow\; x = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \;\Rightarrow\; x = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ sen\,2x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = 210^\circ \;\Rightarrow\; x = 105^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 330^\circ \;\Rightarrow\; x = 165^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 570^\circ \;\Rightarrow\; x = 285^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 2x = 690^\circ \;\Rightarrow\; x = 345^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 3.

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además ED=EC, BC= 3 cm, CA=7 cm. Hallar el área del triángulo CED.



CED es un triángulo isósceles $\Rightarrow$ *la altura correspondiente al vértice E divide la base CD en dos partes iguales.*
Para calcular el área del triángulo CED necesitamos conocer los valores de x y h.

$$sen\,\beta=\frac{h}{3}\ \Rightarrow\ h=3\cdot sen\,\beta\quad;\quad cos\,\beta=\frac{x}{3}\ \Rightarrow\ x=3\cdot cos\,\beta$$

Entonces el problema se reduce a calcular las razones trigonométricas del ángulo β.
Por el teorema de Pitágoras $AB=2\sqrt{10}$ *y además tenemos que* $\beta=180^\circ-2\alpha$

$$sen\,\beta=sen\left(180^\circ-2\alpha\right)=sen\,2\alpha=2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha=2\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12\sqrt{10}}{49}$$

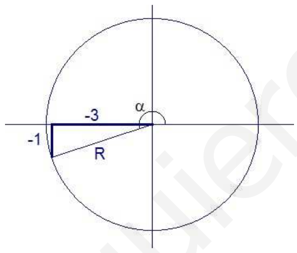
$$cos\,\beta=cos\left(180^\circ-2\alpha\right)=-cos\,2\alpha=-\left(cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)=-\left(\frac{9}{49}-\frac{40}{49}\right)=\frac{31}{49}$$

$$h=3\cdot\frac{12\sqrt{10}}{49}\ \Rightarrow\ h=\frac{36\sqrt{10}}{49}\quad;\quad x=3\cdot\frac{31}{49}\ \Rightarrow\ x=\frac{93}{49}$$

$$A_{triángulo}=\frac{2x\cdot h}{2}=x\cdot h=\frac{93}{49}\cdot\frac{36\sqrt{10}}{49}\ \Rightarrow\ A\simeq 4,41\ cm^2$$

Ejercicio 4.

Si $cotg\alpha=3$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, determina, sin usar la calculadora, el valor de $cotg\,2\alpha$, $tg\frac{\alpha}{2}$, $cos\left(\pi+2\alpha\right)$ y $sen\,4\alpha$.



$cotg\,\alpha=3$ *y* $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ *como vemos en la figura, podemos calcular las razones trigonométricas del ángulo* α *sobre el triángulo marcado, donde* $R=\sqrt{10}$, $\Rightarrow$ $sen\,\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $cos\,\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $tg\,\alpha=\frac{1}{3}$

$$cotg\,2\alpha=\frac{cos\,2\alpha}{sen\,2\alpha}=\frac{cos^2\alpha-sen^2\alpha}{2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}=\frac{cos\,\alpha}{2\cdot sen\,\alpha}-\frac{sen\,\alpha}{2\cdot cos\,\alpha}=\frac{cotg\,\alpha}{2}-\frac{tg\,\alpha}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}\overset{(1)}{=}-\frac{\sqrt{1-cos\,\alpha}}{\sqrt{1+cos\,\alpha}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}}=-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{10}+3\right)^2}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)}}=-\sqrt{\frac{19+6\sqrt{10}}{1}}=-\sqrt{19+6\sqrt{10}}$$

$$cos\left(\pi-2\alpha\right)=-cos\,2\alpha=-\left(cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)=-\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)=-\frac{4}{5}$$

$$sen\,4\alpha=sen\left(2\alpha+2\alpha\right)=2\cdot sen\,2\alpha\cdot cos\,2\alpha=2\cdot\left(2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha\right)\cdot\left(cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)=4\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}=4\cdot\frac{24}{100}=\frac{24}{25}\qquad (1)\left(si\ \ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}\ \Rightarrow\ tg\frac{\alpha}{2}<0\right)$$