

ECUACIONES RACIONALES

Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

$$1) \frac{x^2 - 5x + 4}{8 - x} = 5$$

Aplicamos las reglas de trasposición de términos, para eliminar denominadores: $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$

$$x^2 - 5x + 4 = 40 - 5x \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \pm 6}$$

$$2) \frac{x - 3}{x + 5} = \frac{x - 5}{x + 3}$$

Multiplicamos en cruz, para eliminar denominadores: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$

$$x^2 - 9 = x^2 - 25 \Rightarrow 9 = 25 \Rightarrow \boxed{\text{No hay solución real}}$$

$$3) \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-2} = 1$$

En primer lugar se calcula el m.c.m. de los denominadores: $(x + 1)(x - 2)$

Multiplicamos todos los términos de la ecuación por dicho m.c.m., suprimiendo los denominadores:

$$x \cdot (x - 2) + x \cdot (x + 1) = (x + 1)(x - 2) \rightarrow x^2 - 2x + x^2 + x = x^2 - 2x + x - 2 \rightarrow x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow \boxed{\text{No hay solución real}}$$

$$4) \frac{2x}{x-2} = 1 + \frac{x+2}{2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $2 \cdot (x - 2)$:

$$4x = 2(x - 2) + (x + 2)(x - 2) \rightarrow 4x = 2x - 4 + x^2 - 4 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \text{Resolviendo: } \begin{cases} \boxed{x = 4} \\ \boxed{x = -2} \end{cases}$$

$$5) \frac{3x}{8 + 4x} = \frac{x - 2}{x}$$

Multiplicamos en cruz, para eliminar denominadores: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$

$$3x^2 = 8x - 16 + 4x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$$

$$6) \frac{16x^3 - 12}{2x^2 - 4} = 6 + 8x$$

$$16x^3 - 12 = 12x^2 - 24 + 16x^3 - 32x \Rightarrow 12x^2 - 32x - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{8+10}{6} = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3} \\ x_2 = \frac{8-10}{6} = -\frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$7) \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 4} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

Multiplicamos en cruz, para eliminar denominadores: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$

$$2x^3 + 2x^2 - 4x - 4 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

$$8) \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$\frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2)}{x^2 - 4} = \frac{2x+1}{x+1} \rightarrow \frac{x^2 - x - 2 + x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2x+1}{x+1} \rightarrow \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 4} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Multiplicando en cruz:

$$2x^3 + 2x^2 - 4x - 4 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = 0} \\ x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -4} \end{cases}$$

$$9) \frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $3(x+5)(x-5)$

$$3(x+5)^2 + 3(x-5)^2 = 10(x-5)(x+5) \Rightarrow 3(x^2 + 10x + 25) + 3(x^2 - 10x + 25) = 10x^2 - 250$$

$$6x^2 + 150 = 10x^2 - 250 \Rightarrow 4x^2 - 400 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow \boxed{x = \pm 10}$$

$$10) \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 2} = 4x^2 + 3$$

$$3x^2 + 2 = (4x^2 + 3)(x^2 + 2) \Rightarrow 3x^2 + 2 = 4x^4 + 8x^2 + 3x^2 + 6 \Rightarrow 4x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada: $y^2 + 2y + 1 = 0$

$$(y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\text{No hay solución real}}$$

$$11) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{9}{2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $2(x+1)(x+2)$

$$2x + 4 + 4x + 4 = 9x^2 + 18x + 9x + 18 \Rightarrow 9x^2 + 21x + 10 = 0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-10)}}{2 \cdot 9} = \frac{-21 \pm 9}{18} = \begin{cases} x_1 = \frac{-21+9}{18} = -\frac{12}{18} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-21-9}{18} = -\frac{30}{18} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$12) x-1 = \frac{-4x}{x+1} + 5$$

$$x-1 = \frac{-4x}{x+1} + 5 \rightarrow x-6 = \frac{-4x}{x+1} \quad (x-6)(x+1) = -4x \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = -4x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$13) \frac{3}{x+3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{x-2}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $6(x+3)(x-2)$

$$18(x-2) + (x+3)(x-2) = 12(x+3)$$

$$18x - 36 + x^2 + x - 6 = 12x + 36$$

$$x^2 + 7x - 78 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-7 \pm 19}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = -13 \end{matrix}$$

$$14) \frac{x^2 - 32}{4} = \frac{-28}{x^2 - 9}$$

$$-112 = (x^2 - 32)(x^2 - 9) \Rightarrow -112 = x^4 - 32x^2 - 9x^2 + 288 \Rightarrow x^4 - 41x^2 + 400 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada: $y^2 - 41y + 400 = 0$

$$y = \frac{41 \pm \sqrt{41^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{41 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{41+9}{2} = 25 \Rightarrow x_1 = \pm 5 \\ y_2 = \frac{41-9}{2} = 16 \Rightarrow x_2 = \pm 4 \end{cases}$$