Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Escribimos las matrices asociadas al sistema: la de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*):

$$A^* = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \right)$$

Calculamos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda + 4 - 1 - 2 - 2 - \lambda = -2\lambda - 1 \, ;$$

Hacemos $-2\lambda - 1 = 0$; $-2\lambda = 1$; $\lambda = -\frac{1}{2}$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1^er^ caso: si $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ entonces $r(A) = r(A^*) = 3$ (nº de incógnitas) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (tiene solución única)

2º caso: si $\lambda = -\frac{1}{2}$ entonces:

$$A^* = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \end{array}$$

$r(A) = 2$ ya que C_1 y C_2 no son proporcionales.

Calculamos $r(A^*)$:

$$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} - 1 - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$$ luego $r(A^*) = 3$ ya que $\exists M_3 \neq 0$

Como $\underbrace{r(A)}_{2} \neq \underbrace{r(A^*)}_{3}$ el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

Lo resolvemos ahora para $\lambda = 1$:

$$\begin{rcases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{rcases}$$ lo resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-1-1-2-1}{-3}=\boxed{\frac{5}{3}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{1+4+2-1}{-3}=\frac{6}{-3}=\boxed{-2}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}}{-3}=\frac{2+1+2-1}{-3}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$