Departamento Matemáticas IES "La Basílica"

IES La Basílica

Estudiar para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(la parte $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ es A)

Calculamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} + a + 2a - \cancel{1} - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$-a^2+3a-2=0 \;;\; a^2-3a+2=0 \;;\; a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1er caso: si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces $r(A) = r(A^*) = 3$ (nº de incógnitas) S.C.D. (tiene solución única)

2º caso: si $a=1$ entonces $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ con columnas $C_1\; C_2\; C_3\; C_4$. $r(A)=2$ ya que C_1 y C_2 no son proporcionales

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \cancel{1} - \cancel{1} - 2 = -1 \neq 0 \text{ luego } r(A^*) = 3 \text{ ya que } \exists M_3 \neq 0$$

como $\underbrace{r(A)}_{2} \neq \underbrace{r(A^*)}_{3}$ entonces el sistema es INCOMPATIBLE.

3er caso: si $a=2$ entonces $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ con columnas $C_1\; C_2\; C_3\; C_4$. $r(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ luego } r(A^*) = 2 \text{ ya que } \nexists M_3 \neq 0$$

Como $r(A) = r(A^*) = 2 < 3$ (nº de incógnitas) S.C.I. (tiene infinitas soluciones).

Lo resolvemos para el caso en que sea compatible indeterminado: $a = 2$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Tomamos dos ecuaciones por ser S.C.I.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 - E_1} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y \quad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y = 0}$$

Tomamos $\boxed{z = \lambda}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$x + y + z = 1$; $x + 0 + \lambda = 1$; $\boxed{x = 1 - \lambda}$