Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro *a*.

$$\left.\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+\quad 2y=-2 \end{array}\right\}$$

Resolverlo siempre que sea compatible.

$$\left.\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\} \qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix}=2-a(a+1)=2-a^2-a$$

$$-a^2-a+2=0;\quad a^2+a-2=0;\quad a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=-2 \end{cases}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1er caso: si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ entonces $r(A)=r(A^*)=2$ (nº de incógnitas) S.C.D.

2º caso: si $a=1$ entonces $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$ $\quad r(A)=1$

$|C_1,C_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2-1\neq 0$ luego $r(A^*)=2$ porque $\exists M_2\neq 0$

Como $\underbrace{r(A)}_{1}\neq\underbrace{r(A^*)}_{2}$ SISTEMA INCOMPATIBLE.

3er caso: si $a=-2$ entonces:

$A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$ $\quad r(A)=1$

$r(A^*)=1$ ya que $\nexists M_2\neq 0$

$r(A^*) = 1$ ya que $\nexists\, M_2 \neq 0$

como $r(A) = r(A^*) = 1 < 2$ (nº de incógnitas) S.C.I.

Lo resolvemos en los casos en que es compatible:

1er caso: si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es $\left.\begin{array}{l} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Lo resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2+2(a+1)}{2-a^2-a} = \boxed{\frac{2a+4}{-a^2-a+2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix}}{-a^2-a+2} = \boxed{\frac{-2+a}{-a^2-a+2}}$$

2º caso: si $a = -2$ el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array}\right\} \longrightarrow x - y = 1; \quad \boxed{y = \lambda} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x = 1 + \lambda}$$