

Considérense las siguientes matrices y los parámetros desconocidos  $u$  y  $v$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $u$  y  $v$  para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo  $B^T$  la matriz traspuesta de  $B$ :

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^T + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

- b) Siendo  $A^{-1}$  la matriz inversa de  $A$ , encontrar los valores de las constantes  $a$  y  $b$  que verifiquen:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot B^T + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D \quad \text{Sustituimos y operamos:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\beta \\ -3\alpha & 3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & -2\alpha - 2\beta \\ 6\beta & 3\alpha + 6\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & -4\alpha - 2\beta \\ 10\beta & 2\alpha + 6\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

De ahí aparecen cuatro condiciones (ecuaciones):

$$\left. \begin{array}{l} -2\beta = 2 \\ -4\alpha - 2\beta = u \\ 10\beta = 5 \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \end{array} \right\}$$

$$-2\beta = 2 \rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

$$10\beta = 5; 10(-1) = 5; \boxed{5 = -10}$$

$$2\alpha + 6\beta = -2; 2\alpha + 6(-1) = -2; 2\alpha = -2 + 6; \boxed{\alpha = 2}$$

$$-4\alpha - 2\beta = u; -4 \cdot 2 - 2(-1) = u; -8 + 2 = u; \boxed{u = -6}$$

b)  $A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculamos previamente  $A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$A_{11} = 3 \quad A_{12} = -(-3) = 3$$

$$A_{21} = -(-1) = 1 \quad A_{22} = 2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; [\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos ahora en la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + \frac{1}{3}b \\ a + \frac{2}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -a + 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + \frac{1}{3}b \\ a + \frac{2}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + 1 \\ -a + 2b + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a + \frac{1}{3}b = 2b + 1 \\ a + \frac{2}{3}b = -a + 2b + 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -2 \left( a - \frac{5}{3}b = 1 \right) \\ 2a - \frac{4}{3}b = 2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -2a + \frac{10}{3}b = -2 \\ 2a - \frac{4}{3}b = 2 \end{array} \right\}$$

~~$a - \frac{5}{3}b = 1$~~ ;  $\boxed{b=0}$

$\boxed{a=1}$

Este apartado "b" se puede hacer más rápido así:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplico ambos miembros por la matriz A: (por la izquierda)

$$\underbrace{A \cdot A^{-1}}_I \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

⋮  
(Noj "ahorramos" así calcular  $A^{-1}$ ).