EJERCICIOS RESUELTOS TRIGONOMETRÍA

Cuestión 1.-

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70°

b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y 3,5 rad

Solución:

$$a)\ 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{6}\ \text{rad}$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}$$

$$b)\ \frac{7\pi}{6}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$3{,}5\ \text{rad} = 3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ\ 32'\ 7''$$

Cuestión 2.-

Completa la siguiente tabla:

GRADOS	35º		120º	
RADIANES		2π / 3		2

Solución:

$$35^\circ = \frac{35 \cdot \pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{36}\ \text{rad}$$

$$\frac{2\pi}{3}\ \text{rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ \quad \rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$2\ \text{rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 114^\circ\ 35'\ 30''$$

Por tanto:

GRADOS	**35º**	120º	**120º**	114º35'30''
RADIANES	7π / 36	**2π / 3**	2π / 3	**2**

Cuestión 3.-

a) Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes $\frac{5\pi}{6}$ y 3

b) Expresa en radianes los ángulos: 225° y 100°

www.yoquieroaprobar.es

Solución:

a) $\frac{5\pi}{6}\text{ rad} = \frac{5\pi}{6}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$

$3\text{ rad} = 3\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 171^\circ\, 53'14''$

b) $225^\circ = 225\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\text{ rad}$

$100^\circ = 100\cdot\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{5\pi}{9}\text{ rad}$

Cuestión 4.-

Calcular todas las razones trigonométricas en los siguientes casos:

a. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} : \alpha < 90^\circ$

b. $\cos\alpha = -\frac{3}{5} : \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c. $\operatorname{tag}\alpha = 2 : 180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d. $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{2} : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

e. $\sec\alpha = -2 : \ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

f. $\operatorname{cotag}\alpha = -1 : 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

Solución.

a. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ Sí $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha \in 1^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha\,;\ \operatorname{cosec}\alpha > 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha > 0 \\ \operatorname{tag}\alpha\,;\ \operatorname{cotag}\alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{1/3} = 3 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}/3} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

b. $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$: Sí $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in 2^{o}$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \text{cosec}\,\alpha > 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha < 0 \end{cases}$

Conocido el valor del coseno se calcula el seno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones directas (seno, coseno y tangente) se calculan la inversas (cosecante, secante y cotangente) mediante su definición.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{-4/3} = -\frac{3}{4}$$

c. $\text{tag}\,\alpha = 2$: Sí $180^{o} < \alpha < 270^{o} \Rightarrow \alpha \in 3^{o}$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \text{cosec}\,\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha > 0 \end{cases}$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la cotangente y la secante.

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \sec\alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{2^2+1} = -\sqrt{5}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por último del seno se obtiene la cosecante.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{5}/5} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

www.yoquieroaprobar.es

d. $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{2}$: Si $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \operatorname{cosec}\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha < 0 \end{cases}$

De la definición de cosecante se obtienen el seno y la cotangente.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} : \ \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3}$$

Conocido el valor del seno se calcula el coseno mediante la ecuación fundamental.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = +\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Conocido el seno y el coseno se calcula la tangente por su definición.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2/3}{\sqrt{5}/3} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidas las razones directas (coseno y tangente) se calculan la inversas (secante y cotangente) mediante su definición.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/3} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{5}/5} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

e. $\sec\alpha = -2$: Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 3^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha\,;\ \operatorname{cosec}\alpha < 0 \\ \cos\alpha\,;\ \sec\alpha < 0 \\ \text{tag}\,\alpha\,;\ \text{cotag}\,\alpha > 0 \end{cases}$

Conocida la secante se calcula el coseno y la tangente.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha : \ \text{tag}\,\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = +\sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{3}$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\,\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conocidas las razones directas (seno y tangente) se calculan la inversas (cosecante y cotangente) mediante su definición.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} : \ \text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

f. $\text{cotag}\,\alpha = -1$: Si $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow \alpha \in 4^\circ$ Cuadrante: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha;\ \text{cosec}\,\alpha < 0 \\ \cos\alpha;\ \sec\alpha > 0 \\ \text{tag}\,\alpha;\ \text{cotag}\,\alpha < 0 \end{cases}$

Conocida la cotangente se calcula la tangente y la cosecante.

$$\text{cotag}\,\alpha = \frac{1}{\text{tag}\,\alpha} \qquad \text{tag}\,\alpha = \frac{1}{\text{cotag}\,\alpha} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{cotag}^2\alpha + 1 = \text{cos ec}^2\alpha \qquad \text{cosec}\,\alpha = \pm\sqrt{\text{cotag}^2\alpha + 1} = -\sqrt{(-1)^2 + 1} = -\sqrt{2}$$

Conocida la cosecante se calcula el seno

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con el seno y la tangente se calcula el coseno con la definición de tangente.

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tag}\,\alpha} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conocido el coseno se calcula la secante.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

<u>Cuestión 5</u>.- Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen}\ \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \text{cosec}\ \alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{1}{4} \qquad \sec\ \alpha = 4$$

$$\text{tg}\ \alpha = -\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \qquad \text{cotg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

<u>Cuestión 6</u>.- Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\sec\ \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \qquad \cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen}\ \alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg}\ \alpha = 2 \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{2}$$

www.yoquieroaprobar.es

Cuestión 7.- Sabiendo que sec α = 2, 0< α < π /2, calcular las restantes razones trigonométricas.

$$\cos\ \alpha = \frac{1}{2} \qquad \sec\ \alpha = 2$$

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Cuestión 8.- Calcula las razones de los siguientes ángulos:

a) 225°

$$\sin(225°) = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(225°) = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(225°) = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$$

b) 330°

$$\sin(330°) = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(330°) = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(330°) = \tan(360° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) 655°

$$\begin{array}{l|l} 2655° & 360° \\ \hline 135° & 7 \end{array}$$

$$sen 2655° = sen 135° = sen(180° - 45°) = sen 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2655° = \cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 2655° = -1$$

www.yoquieroaprobar.es

d) −840º

$$\begin{array}{l|l} -840^\circ & 360^\circ \\ \hline -120^\circ & -2 \end{array}$$

$$sin(-840^\circ) = sin(-120^\circ) = -sin(180^\circ - 60^\circ) = -sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-840^\circ) = \cos(-120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-840^\circ) = \tan(-120^\circ) = -\tan(120^\circ) = \sqrt{3}$$

Cuestión 9.-

Calcula las razones trigonométricas de 140º y de 220º, sabiendo que:

$$sen 40^\circ = 0{,}64;\ cos 40^\circ = 0{,}77;\ tg 40^\circ = 0{,}84$$

Solución:

Como $140^\circ = 180^\circ - 40^\circ$ y $220^\circ = 180^\circ + 40^\circ$, entonces

$$sen 140^\circ = sen 40^\circ = 0{,}64$$
$$cos 140^\circ = -cos 40^\circ = -0{,}77$$
$$tg 140^\circ = -tg 40^\circ = -0{,}84$$

$$sen 220^\circ = -sen 40^\circ = -0{,}64$$
$$cos 220^\circ = -cos 40^\circ = -0{,}77$$
$$tg 220^\circ = tg 40^\circ = 0{,}84$$

Cuestión 10.-

Sabiendo que $sen\ 50^\circ = 0{,}77$, $cos\ 50^\circ = 0{,}64$ y $tg\ 50^\circ = 1{,}19$, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $cos 130^\circ$ b) $tg 310^\circ$ c) $cos 230^\circ$ d) $sen 310^\circ$

Solución:

a) $cos 130^\circ = cos(180^\circ - 150^\circ) = -cos 50^\circ = -0{,}64$

b) $tg 310^\circ = tg(360^\circ - 50^\circ) = -tg 50^\circ = -1{,}19$

c) $cos 230^\circ = cos(180^\circ + 50^\circ) = -cos 50^\circ = -0{,}64$

d) $sen 310^\circ = sen(360^\circ - 50^\circ) = -sen 50^\circ = -0{,}77$

www.yoquieroaprobar.es

Cuestión 11.-

Si $sen\ \alpha = 0{,}35$ y $0° < \alpha < 90°$ halla (sin calcular α):

a) $sen\left(180° - \alpha\right)$ **b)** $cos\left(180° + \alpha\right)$

Solución:

$$a)\ sen\left(180° - \alpha\right) = sen\,\alpha = 0{,}35$$
$$b)\ cos\left(180° + \alpha\right) = -cos\,\alpha$$

Necesitamos saber cuánto vale $cos\ \alpha$:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}1225 + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad cos^2\alpha = 0{,}8775$$
$$cos\alpha = 0{,}94 \text{ (es positivo, pues } 0° < \alpha < 90°\text{)}$$

$$\text{Por tanto } cos\left(180° + \alpha\right) = -cos\alpha = -0{,}94$$

Cuestión 12.-

Si $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $tg\left(180° - \alpha\right)$ **b)** $tg\left(180° + \alpha\right)$ **c)** $tg\left(360° - \alpha\right)$ **d)** $tg\left(360° + \alpha\right)$

Solución:

$$a)\ tg\left(180° - \alpha\right) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$$
$$b)\ tg\left(180° + \alpha\right) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$
$$c)\ tg\left(360° - \alpha\right) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$$
$$d)\ tg\left(360° + \alpha\right) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$

Cuestión 13.- Comprobar las identidades:

a) $tg\,\alpha + \text{cotg}\ \alpha = \sec\alpha\ \text{cosec}\,\alpha$

$$tg\,\alpha + \text{cotg}\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

b) $\text{cotg}^2\, a = \cos^2 a + \left(\text{cotg}\ a \cdot \cos a\right)^2$

$$\cos^2 a + \left(\text{cotg}\ a \cdot \cos a\right)^2 = \cos^2 a + \text{cotg}^2\ a \cdot \cos^2 a =$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\cos^2 a\left(1+\text{cotg}^2\ a\right)=\cos^2 a\cdot \text{cosec}^2\ a=\frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2\ a}=\text{cotg}^2\ a$$

c) $\frac{1}{\sec^2 a}=\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a$

$$\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a=\cos^2 a\left(\text{sen}^2 a+\cos^2 a\right)=\cos^2 a=\frac{1}{\sec^2 a}$$

d) $\text{cotg}\, a\cdot\sec a=\text{cosec}\, a$

$$\text{cotg}\, a\cdot\sec a=\frac{\cos a}{\text{sen}\, a}\cdot\frac{1}{\cos a}=\frac{1}{\text{sen}\, a}=\text{cosec}\, a$$

e) $\sec^2 a+\text{cosec}^2 a=\frac{1}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}$

$$\sec^2 a+\text{cosec}^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}+\frac{1}{\text{sen}^2 a}=\frac{\text{sen}^2 a+\cos^2 a}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}=\frac{1}{\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}$$

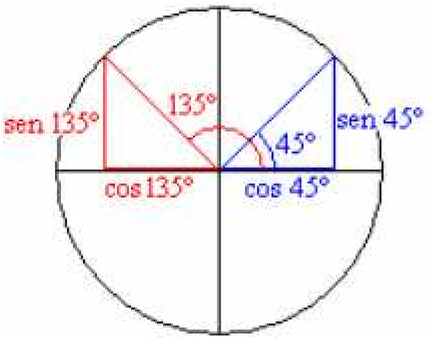
Cuestión 14.-

Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de sus ángulos asociados agudos.

- **a)** 135º
- **b)** 120º
- **c)** 330º
- **d)** 240º
- **e)** 150º
- **f)** 1290º
- **g)** Sabiendo que tg 18º = 0,32 calcular la razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
  - **i)** 72º
  - **ii)** 108º
  - **iii)** 162º
  - **iv)** 198º
  - **v)** 252º
  - **vi)** 288º
  - **vii)** 342º

Solución.

a. 135º es suplementario con 45º (135º + 45º =180º). Las razones trigonométricas de 135º están relacionadas con las de 45º, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

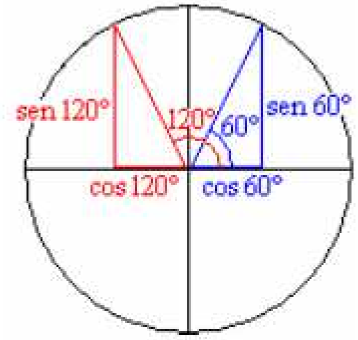


$$\text{sen}\,135° = \text{sen}\,45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,135° = \frac{\text{sen}\,135°}{\cos 135°} = \frac{\text{sen}\,45°}{-\cos 45°} = -\text{tg}\,45° = -1$$

b. 120º es suplementario con 60º (120º + 60º =180º). Las razones trigonométricas de 120º están relacionadas con las de 60º, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.

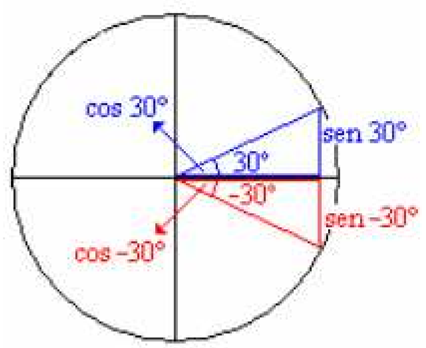


$$\text{sen}\,120^\circ = \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,135^\circ = \frac{\text{sen}\,120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\text{sen}\,60^\circ}{-\cos 60^\circ} = -\text{tg}\,60^\circ = -\sqrt{3}$$

c. 330º equivalente a –30º, asociado a 30º

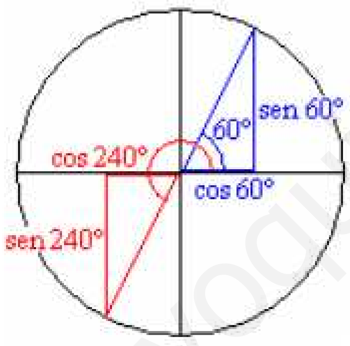


$$\text{sen}-30^\circ = -\text{sen}\,30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos -30^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\left(-30^\circ\right) = \frac{\text{sen}\left(-30^\circ\right)}{\cos\left(-30^\circ\right)} = -\text{tg}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d. 240º se asocia a 60º porque se diferencia del él en 180º (240º = 60º +180º).

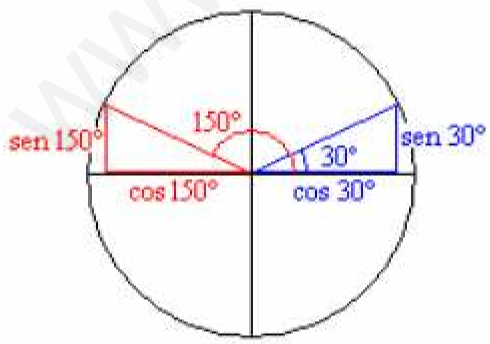


$$\text{sen}\,240^\circ = -\text{sen}\,60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,240^\circ = \frac{\text{sen}\,240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{-\text{sen}\,60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \text{tg}\,60 = \sqrt{3}$$

e. 150º suplementario de 30º (150º + 30º = 180º)



$$\text{sen}\,150^\circ = \text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

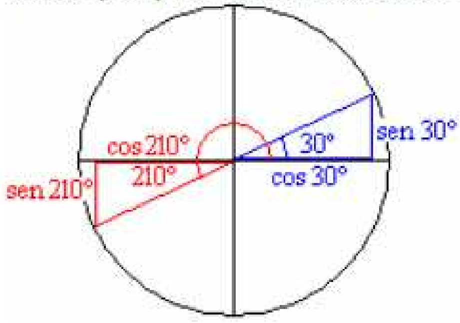
$$\text{tg}\,150^\circ = \frac{\text{sen}\,150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\text{sen}\,30^\circ}{-\cos 30^\circ} = -\text{tg}\,30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

f. 1290. Por ser un ángulo superior a 360º, se divide por 360 y nos quedamos con el resto.

$$1260º = 3\times360º+210$$

Las razones trigonométricas de 1290º coinciden con las de 210º, (relación entre las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, 360º ó 2π radianes) y las de este (210º) se relacionan con las de 30º (210º = 180º+30º).



$$\operatorname{sen} 1290º = \operatorname{sen}(360º\times3+210º) = \operatorname{sen} 210º = -\operatorname{sen} 30º = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 1290º = \cos(360º\times3+210º) = \cos 210º = -\cos 30º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 1290º = \operatorname{tg}(360º\times3+210º) = \operatorname{tg} 210º = \frac{\operatorname{sen} 210º}{\cos 210} = \frac{-\operatorname{sen} 30º}{-\cos 30º} = \operatorname{tg} 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

g. Lo primero es calcular el seno y el coseno de 18º conocida la tangente (tg 18º = 0,32). Por ser un ángulo del primer cuadrante, todas sus razones trigonométricas son positivas.

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante.

$$\operatorname{tag}^2 18º+1 = \sec^2 18º : \sec 18º = \pm\sqrt{\operatorname{tag}^2 18º+1} = +\sqrt{0{,}32^2+1} = 1{,}05$$

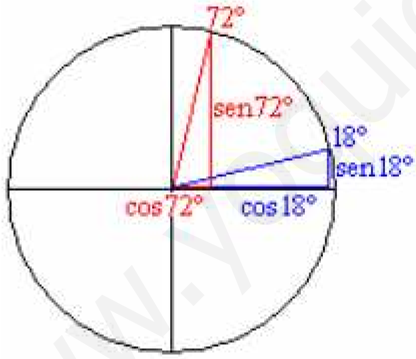
Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec 18º = \frac{1}{\cos 18º} : \cos 18º = \frac{1}{\sec 18º} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}95$$

Conocidas la tangente y el coseno se obtiene el seno mediante la definición de tangente.

$$\operatorname{tag} 18º = \frac{\operatorname{sen} 18º}{\cos 18º} : \operatorname{sen} 18º = \cos 18 \cdot \operatorname{tag} 18 = 0{,}95 \cdot 0{,}32 = 0{,}30$$

i. $72º = 90º - 18º$

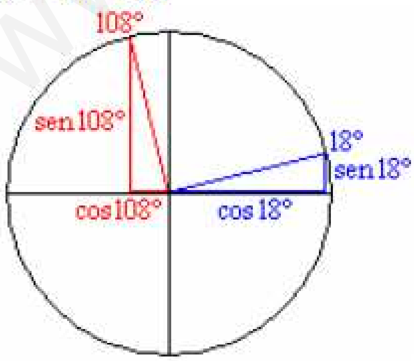


$$\operatorname{sen} 72º = \cos 18º = 0{,}95$$

$$\cos 72º = \operatorname{sen} 18º = 0{,}30$$

$$\operatorname{tg} 72º = \frac{\operatorname{sen} 72º}{\cos 72º} = \frac{\cos 18º}{\operatorname{sen} 18º} = \frac{1}{\operatorname{tg} 18º} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}12$$

ii. $108º = 90º + 18º$



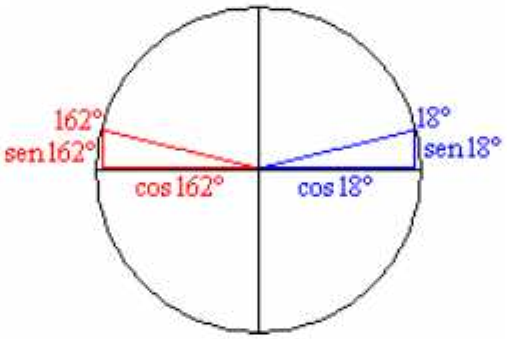
$$\operatorname{sen} 108º = \cos 18 = 0{,}95$$

$$\cos 108º = -\operatorname{sen} 18º = -0{,}30$$

$$\operatorname{tg} 108º = \frac{\operatorname{sen} 108º}{\cos 108º} = \frac{\cos 18º}{-\operatorname{sen} 18º} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 18º} = -\frac{1}{0{,}32} = -3{,}12$$

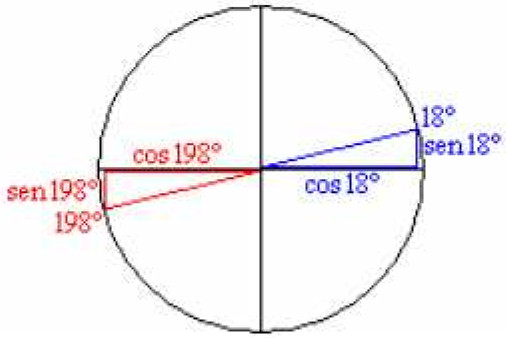
www.yoquieroaprobar.es

iii. $162^\circ = 180^\circ - 18^\circ$



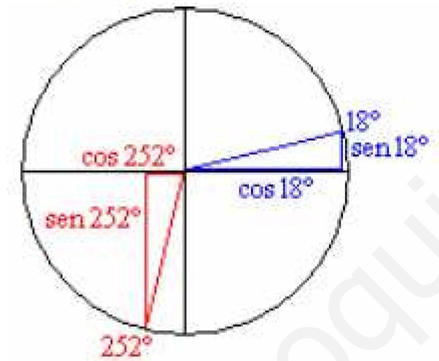
$$\text{sen}\,162^\circ = \text{sen}\,18^\circ = 0{,}30$$
$$\cos 162^\circ = -\cos 18^\circ = -0{,}95$$
$$\text{tg}\,162^\circ = \frac{\text{sen}162^\circ}{\cos 162^\circ} = \frac{\text{sen}\,18^\circ}{-\cos 18^\circ} = -\text{tg}\,18^\circ = -0{,}32$$

iv. $198^\circ = 180^\circ + 18^\circ$



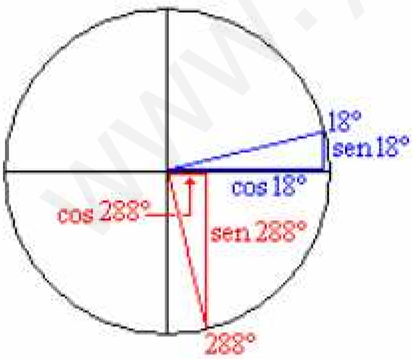
$$\text{sen}\,198^\circ = -\text{sen}\,18^\circ = -0{,}30$$
$$\cos 198^\circ = -\cos 18^\circ = -0{,}95$$
$$\text{tg}\,198^\circ = \frac{\text{sen}198^\circ}{\cos 198^\circ} = \frac{-\text{sen}\,18^\circ}{-\cos 18^\circ} = \text{tg}\,18^\circ = 0{,}32$$

v. $252^\circ = 270^\circ - 18^\circ$



$$\text{sen}\,252^\circ = -\cos 18 = -0{,}95$$
$$\cos 252^\circ = -\text{sen}18^\circ = -0{,}30$$
$$\text{tg}\,252^\circ = \frac{\text{sen}\,252^\circ}{\cos 252^\circ} = \frac{-\cos 18^\circ}{-\text{sen}\,18^\circ} = \frac{1}{\text{tg}\,18^\circ} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}12$$

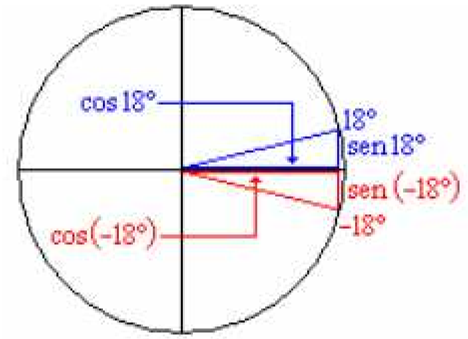
vi. $298^\circ = 270^\circ + 18^\circ$



$$\text{sen}\,288^\circ = -\cos 18 = -0{,}95$$
$$\cos 288^\circ = \text{sen}18^\circ = 0{,}30$$
$$\text{tg}\,288^\circ = \frac{\text{sen}\,288^\circ}{\cos 288^\circ} = \frac{-\cos 18^\circ}{\text{sen}\,18^\circ} = -\frac{1}{\text{tg}\,18^\circ} = -\frac{1}{0{,}32} = -3{,}12$$

www.yoquieroaprobar.es

vii. $342^\circ = -18^\circ$



$$\operatorname{sen}(-18^\circ) = -\operatorname{sen} 18^\circ = -0{,}30$$
$$\cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ = 0{,}95$$
$$\operatorname{tg}(-18^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(-18^\circ)}{\cos(-18)^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 18^\circ}{\cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 18^\circ = -0{,}32$$

C**uestión 15**.- Simplificar las siguientes expresiones:

a)

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha / \cos\alpha} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha$$

b)

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha} \cdot \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha} \cdot \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{(1-\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt{1^2 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha$$

c)

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

d)

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{-(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = -1$$

e)

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$$

f)

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$$

g)

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1-\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha}=1+\operatorname{sen}\alpha$$

Cuestión 16.-

Demostrar si son verdaderas o falsas las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha$$

c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$$

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\cdot(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=(1-\cos^2\alpha)-(1-\operatorname{sen}^2\beta)=1-\cos^2\alpha-1+\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

www.yoquieroaprobar.es

g) $\dfrac{1+\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\alpha}$

$$\frac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha}=\frac{1+\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}$$

h) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta=\cos^2\alpha\cdot\left(1-\text{sen}^2\beta\right)-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\text{sen}^2\beta=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta-\text{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$$

i) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\text{cosec}\,\alpha=1$

$$\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\text{cosec}\,\alpha=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}=1$$

j) $(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2=2$

$$(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2=\text{sen}^2\alpha+2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha-2\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$$
$$=\left(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\left(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=1+1=2$$

k) $\text{ctg}\alpha-\dfrac{\text{ctg}^2\alpha-1}{\text{ctg}\alpha}=\text{tg}\alpha$

$$\text{ctg}\alpha-\frac{\text{ctg}^2\alpha-1}{\text{ctg}\alpha}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}-1}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{\text{tg}\,\alpha\cdot\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)}{\text{tg}^2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}-\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{1-\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{1-1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=\text{tg}\,\alpha$$

l) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{ctg}\alpha}=\dfrac{\text{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{ctg}\alpha}=\frac{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\frac{\text{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$$

m) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha+\text{cosec}\,\alpha}=\cos\alpha$

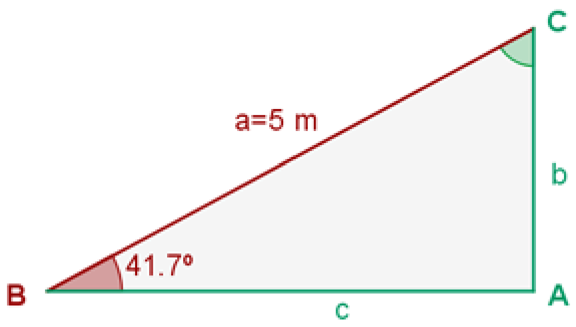
$$\frac{\text{sen}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha+\text{cosec}\,\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{\text{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{\text{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}}=\frac{\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\cos\alpha$$

n) $\dfrac{1-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$

$$\frac{1-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(1-\text{sen}\,\alpha)\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{1^2-\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot(1+\text{sen}\,\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$$

www.yoquieroaprobar.es

Cuestión 17.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo

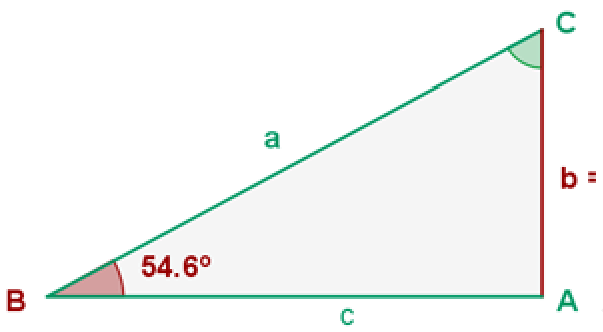


$$C = 90^{\circ} - 41.7^{\circ} = 48.3^{\circ}$$

$b = a \cdot sen B$ $\qquad$ $b = 5 \cdot sen 41.7^{\circ} = 3.326 m$

$c = a \cdot \cos B$ $\qquad$ $c = 5 \cdot \cos 41.7^{\circ} = 3.733 m$

Cuestión 18.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.

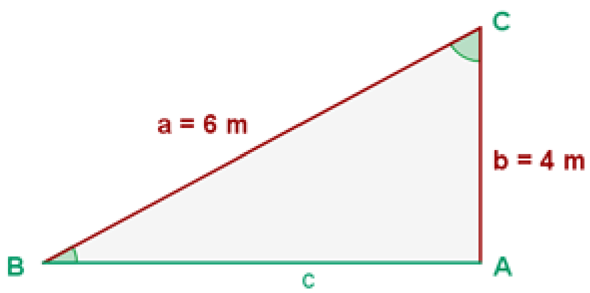


$$C = 90^{\circ} - 54.6^{\circ} = 35.4^{\circ}$$

$c = \dfrac{b}{tg B}$ $\qquad$ $c = \dfrac{3}{tg 54.6^{\circ}} = 2.132 m$

$a = \dfrac{b}{sen B}$ $\qquad$ $a = \dfrac{3}{sen 54.6^{\circ}} = 3.68 m$

Cuestión 19.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.



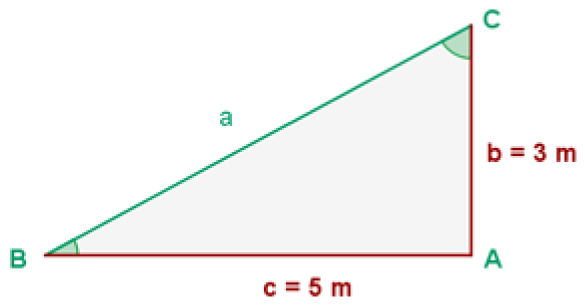
www.yoquieroaprobar.es

$C = \arccos \frac{4}{6} = 48.19^\circ$

$B = 90^\circ - 48.19^\circ = 41.81^\circ$

$c = a \cdot sen\, C \qquad c = 6 \cdot sen\, 48.19^\circ = 4.47\, m$

Cuestión 20.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.

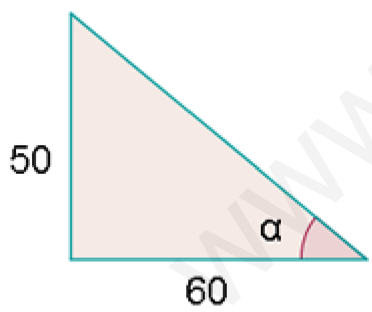


$C = \arc tg\, \frac{5}{3} = 59.04^\circ$

$B = 90^\circ - 59.04^\circ = 30.96^\circ$

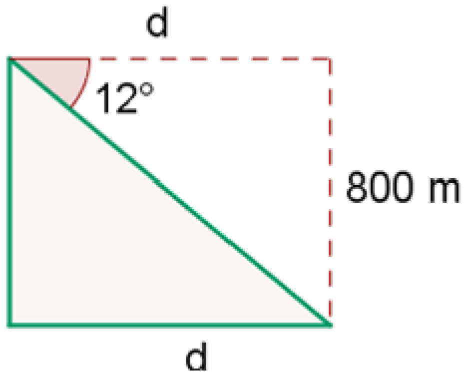
$a = \frac{c}{sen\, C} \qquad a = \frac{5}{sen\, 59.04^\circ} = 5.831\, m$

Cuestión 21.- Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.



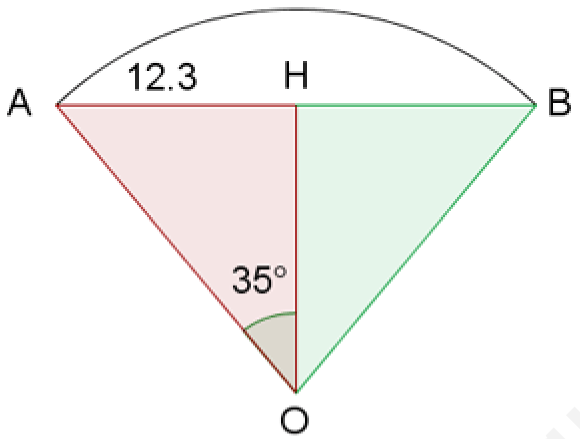
$tg\, \alpha = \frac{50}{60} \qquad \alpha = 39^\circ 48' 43''$

Cuestión 22.- Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?



$$tg\,12^{o} = \frac{800}{d} \qquad d = 3763.70 \text{ m}$$

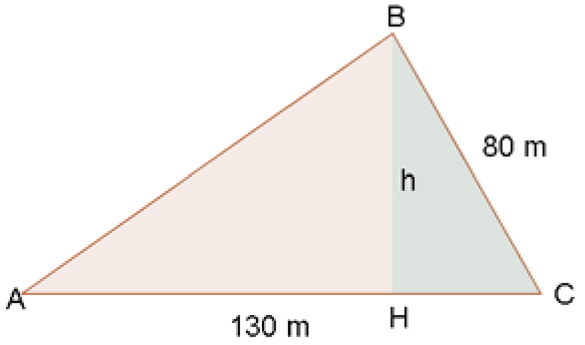
Cuestión 23.- Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70º



$$sen\,35^{o} = \frac{12.3}{OA}$$

$$OA = \frac{12.3}{sen\,35^{o}} = 21.44 \; cm$$

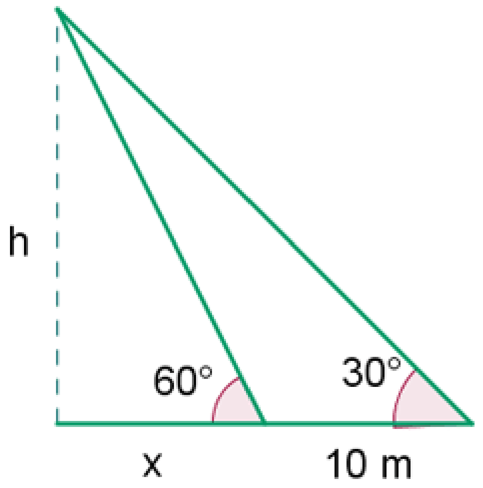
Cuestión 24.- Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



$h = 80 \cdot sen\,70^{\circ}$

$$A = \frac{130 \cdot 80 \cdot sen\,70^{\circ}}{2} = 4886.40m^2$$

<u>Cuestión 25</u>.- Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.



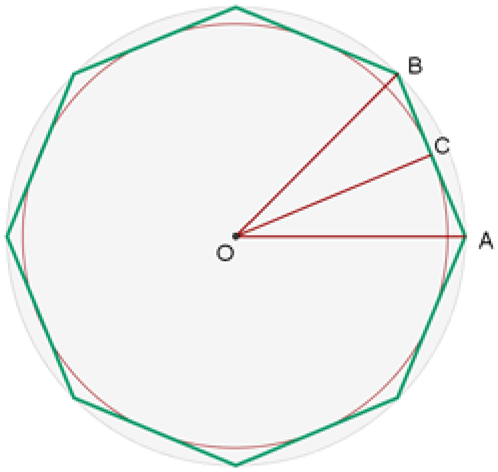
$$tg\,30^{\circ} = \frac{h}{10+x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10+x}$$

$$tg\,60^{\circ} = \frac{h}{x} \qquad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\begin{array}{rl} 10\sqrt{3} + \sqrt{3}x & = 3h \\ -\sqrt{3}x & = -h \\ \hline 10\sqrt{3} \qquad & = 2h \end{array} \qquad h = 5\sqrt{3}$$

<u>Cuestión 26</u>.- La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

www.yoquieroaprobar.es



$$O = \frac{360°}{8} = 45° \qquad \frac{O}{2} = 22°30'$$

Radio de la circunferencia inscrita:

$$OC = \frac{AC}{tg\,22°30'} \qquad OC = \frac{6}{0.4142} = 14.49$$

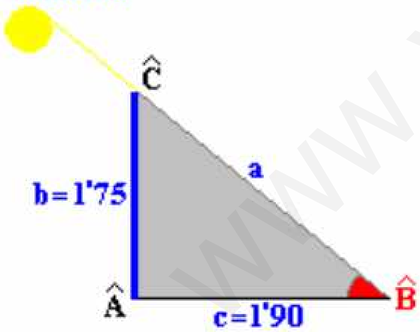
Radio de la circunferencia circunscrita:

$$OA = \frac{AC}{sen\,22°30'} \qquad OC = \frac{6}{0.3827} = 15.68$$

Cuestión 27.-

Un individuo cuya altura es de 1,75 m. proyecta una sombra de 1,90 m. Calcular las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del Sol con la horizontal.

Solución.



Se pide calcular las razones trigonométricas del ángulo B, para lo cual hace falta la longitud de la hipotenusa, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1'75^2 + 1'90^2} = 2'58$$

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{1'75}{2'58} = 0'68$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{1'90}{2'58} = 0'74$$

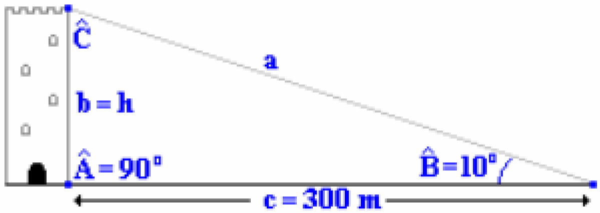
$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{1'75}{1'90} = 0'92$$

Nota: Como norma general se usan tantos decimales como los que lleven los datos

<u>Cuestión 28</u>.-

Una torre se a 300 m de su pie, bajo un ángulo de 10º. Calcular su altura. Dato: sen10º=0'1736

Solución.



Aplicando la definición de de tangente al ángulo B se puede calcular la altura de la torre.

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{h}{300}$$

$$h = 300 \cdot \text{tg}\,\hat{B} = 300 \cdot \text{tg}\,10^{\circ}$$

Cálculo de tg 10º.

$$\text{tg}\,10^{\circ} = \frac{\text{sen}\,10}{\cos 10} = \frac{\text{sen}\,10}{\sqrt{1-\text{sen}^2 10}} = \frac{0'1736}{\sqrt{1-0'1736^2}} = 0'1763$$

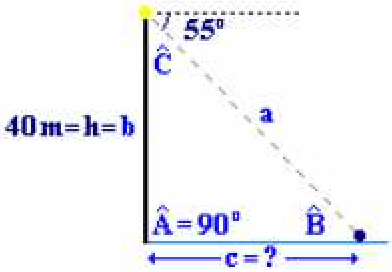
Se sustituyen en la expresión de la altura.

$$h = 300 \cdot \text{tg}\,10^{\circ} = 300 \cdot 0'1763 = 52'89 \text{ m}$$

<u>Cuestión 29</u>.-

Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

Solución.



La distancia pedida se halla mediante la definición de tangete de $\hat{C}$, el ángulo $\hat{C}$ se calcula como complementario del ángulo de depresión.

$$\hat{C} = 90 - 55 = 35^{\circ}$$

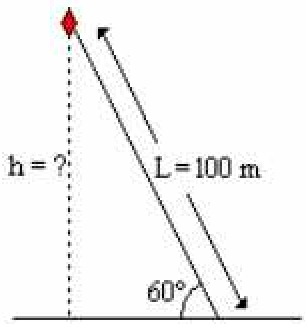
$$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{c}{b} = \frac{c}{40}$$

$$c = 40 \cdot \text{tg}\,\hat{C} = 40 \cdot \text{tg}\,35^{\circ} = 28 \text{ m}$$

<u>Cuestión 30</u>.-

Una cometa esta unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esta tirante, hallar a que altura sobre el suelo se encuentra la cometa.

Solución.



La altura a la que se encuentra la cometa se calcula mediante la definición de seno de 60º

$$\text{sen}\,60^{\circ} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{h}{L}$$

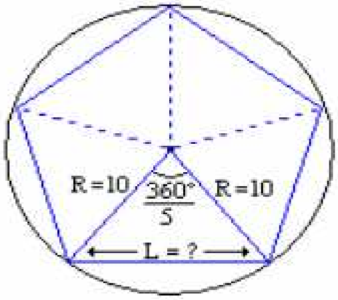
$$\text{sen}\,60^{\circ} = \frac{h}{L} \qquad h = L \cdot \text{sen}\,60^{\circ} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

<u>Cuestión 31</u>.-

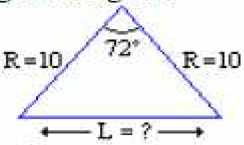
www.yoquieroaprobar.es

Calcular la longitud del lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

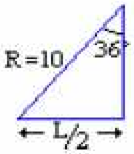
Solución.



Un pentágono regular inscrito en una circunferencia se puede dividir en cinco triángulos isósceles de los que se conocería la longitud de los lados iguales (R) y el ángulo desigual.



Cada triángulo isósceles a su vez se puede dividir en dos triángulos rectángulos de los que se conocería un ángulo agudo y la hipotenusa.

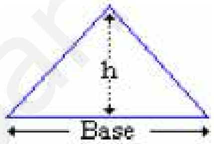


Aplicando la definición de seno de 36º se calcula la longitud del lado de triángulo (L/2) y de está, la del lado del pentágono regular.

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{L/2}{R} \qquad \frac{L}{2} = R \cdot \operatorname{sen} 36^\circ \qquad L = 2R \cdot \operatorname{sen} 36^\circ = 2 \cdot 10 \operatorname{sen} 36^\circ \approx 11'8 \text{ cm}$$

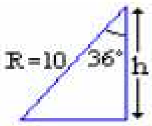
El área del pentágono se calcula como cinco veces la de uno cualquiera de los triángulos isósceles en el que lo hemos dividido.

$$A_{Pent} = 5A_{Tr}$$



El área del triángulo se calcula según su definición

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h$$



Donde la base es la longitud del lado del pentágono y la altura se calcula de igual forma que el lado del pentágono solo que en este caso utilizando la definición de coseno de 36º.

$$\cos 36^\circ = \frac{h}{R} \qquad h = R \cos 36^\circ = 10 \cos 36^\circ \approx 8'1 \text{ cm}$$

Conocida la base y la altura se calcula el área del triángulo, y multiplicando por cinco está, el área del pentágono.

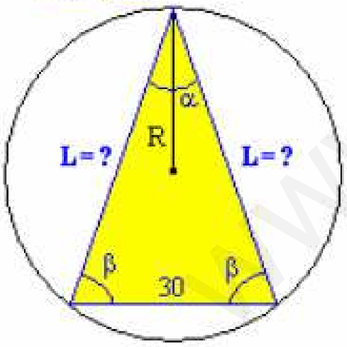
$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 11'8 \cdot 8'1 \approx 47'6 \text{ cm}^2$$

$$A_{Pent} = 5A_{Tr} = 5 \cdot 47'6 = 237'8 \text{ cm}^2$$

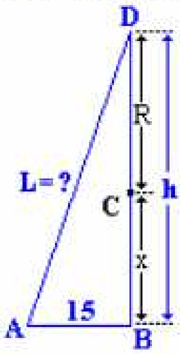
Cuestión 32.-

Un triángulo isósceles esta inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro, si el lado desigual es de 30 cm de longitud, calcular la longitud de los otros dos lados, los ángulos y el área.

Solución.



Se pide calcular la longitud de los lados iguales (L), los ángulos α y β, y el área del triángulo. Se empieza por calcular la longitud de los lados iguales, para ello se divide por la base el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, obteniendo el triángulo ABD.

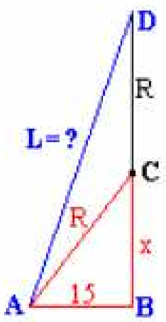


Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo

$$L^2 = 15^2 + h^2$$

Donde $h = R + x$

La longitud x se puede calcular en el triángulo ABC aplicando el teorema de Pitágoras:



$$R^2 = 15^2 + x^2 \qquad x = \sqrt{R^2 - 15^2}$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

Conocido x se calcula h

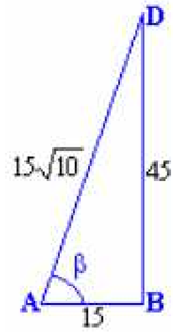
$$h = 25 + 20 = 45$$

www.yoquieroaprobar.es

Conocido h se calcula L con la primera ecuación.

$$L^2 = 15^2 + 45^2 = 2250 \qquad L = \sqrt{2250} = 15\sqrt{10}$$

Ángulo β. Se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo β.

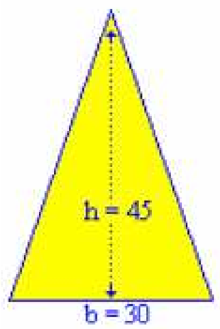


$$\cos\beta = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{15\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\beta = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10} = 71'6^\circ$$

Conocido β y teniendo en cuenta que la suma de ángulos es igual a 180º, se calcula α.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \qquad \alpha = 180 - 2\beta = 180 - 2\cdot 71'6 = 36'8^\circ$$



El área del triángulo se calcula por su definición

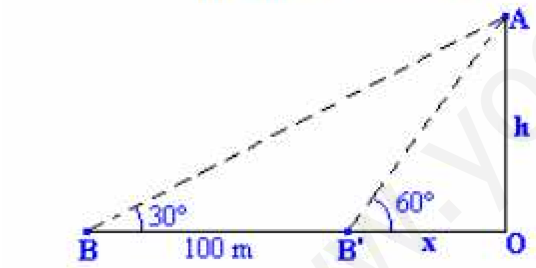
$$A = \frac{1}{2}b\cdot h = \frac{1}{2}30\cdot 45 = 675\ \text{cm}^2$$

Cuestión 33.-

Desde un barco se divisa el alto de una montaña bajo una visual que forma con la horizontal un ángulo de 60º. Si el barco se aleja 100 m. la nueva visual forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular la altura de la montaña.

Solución.

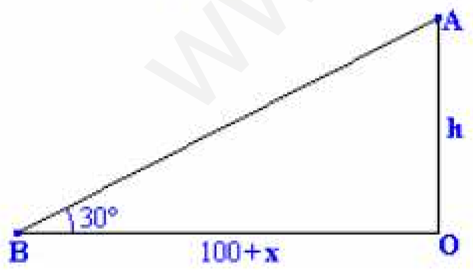
Problema de la doble observación ó doble tangente.



Se resuelve descomponiendo en dos triángulos rectángulos BOA y B'OA, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

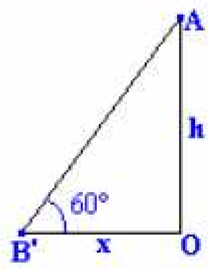
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOB:



$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{100+x}$$

Triángulo AOB'



$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases}\text{tg}\,30^\circ = \dfrac{h}{100+x} \\ \text{tg}\,60^\circ = \dfrac{h}{x}\end{cases} : h = x\,\text{tg}\,60^\circ : \quad \text{tg}\,30^\circ = \frac{x\,\text{tg}\,60^\circ}{100+x}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\text{tg } 30^\circ(100+x) = x \text{ tg } 60^\circ \quad : \quad 100 \text{ tg } 30^\circ + x \text{ tg } 30^\circ = x \text{ tg } 60^\circ \quad : \quad 100 \text{ tg } 30^\circ = x \text{ tg } 60^\circ - x \text{ tg } 30^\circ$$

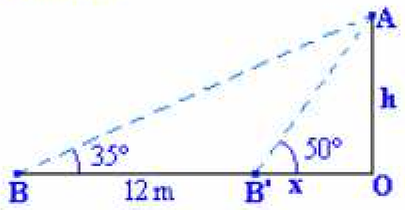
$$100 \text{ tg } 30^\circ = x(\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ) \quad : \quad x = \frac{100 \text{ tg } 30^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ} = 50 \text{ m}$$

$$h = x \text{ tg } 60^\circ = 50 \text{ tg } 60^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86'6 \text{ m}$$

Cuestión 34.-

Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de la visual y la horizontal mide 50º. Desde 12 m más atrás el ángulo es de 35º. Calcula la altura del árbol gráficamente y por técnicas trigonométricas.

Solución.



Problema de doble observación ó doble tangente.

$$\begin{cases} BOA : \text{tg } 35^\circ = \dfrac{h}{12+x} \\ B'OA : \text{tg } 50^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \text{ tg } 50^\circ : \quad \text{tg } 35^\circ = \frac{x \text{ tg } 50^\circ}{12+x}$$

$$\text{tg } 35^\circ(12+x) = x \text{ tg } 50^\circ \quad : \quad 12 \text{ tg } 35^\circ + x \text{ tg } 35^\circ = x \text{ tg } 50^\circ \quad : \quad 12 \text{ tg } 35^\circ = x \text{ tg } 50^\circ - x \text{ tg } 35^\circ$$

$$12 \text{ tg } 35^\circ = x(\text{tg } 50^\circ - \text{tg } 35^\circ) \quad : \quad x = \frac{12 \text{ tg } 35^\circ}{\text{tg } 50^\circ - \text{tg } 35^\circ} = 17'1 \text{ m}$$

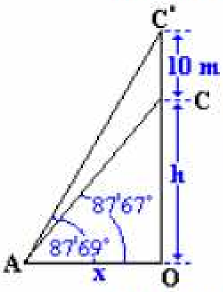
$$h = x \text{ tg } 50^\circ = 17'1 \text{ tg } 50^\circ \approx 20'4 \text{ m}$$

Cuestión 35.-

Se quiere calcular la altura de una colina situada al borde del mar, si colocamos un poste de 10 m sobre su punto más alto, desde un punto de la orilla del mar, se observan los vértices inferior y superior del poste bajo ángulos de 87’67º y 87’69º respectivamente. Calcular la altura de la colina sobre el nivel del mar.

Solución.

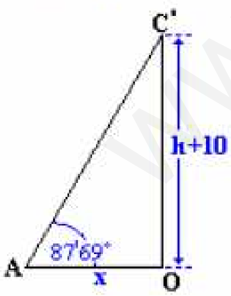
Problema de la doble observación ó doble tangente.



El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y AOC’, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

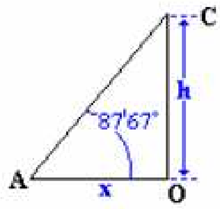
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOC’:



$$\text{tg } 86'69^\circ = \frac{h+10}{x}$$

Triángulo AOC:



$$\text{tg } 86'67^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\begin{cases} \text{tg } 86'69^\circ = \dfrac{h+10}{x} \\ \text{tg } 86'67^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} : h = x \text{ tg } 86'67^\circ : \quad \text{tg } 86'69^\circ = \frac{x \text{ tg } 86'67 + 10}{x}$$

$$x \text{ tg } 86'69^\circ = x \text{ tg } 86'67 + 10 \quad : \quad x \text{ tg } 86'69^\circ - x \text{ tg } 86'67 = 10 \quad : \quad x(\text{tg } 86'69^\circ - \text{tg } 86'67) = 10$$

$$x = \frac{10}{\text{tg } 86'69^\circ - \text{tg } 86'67} = 961 \text{ m}$$

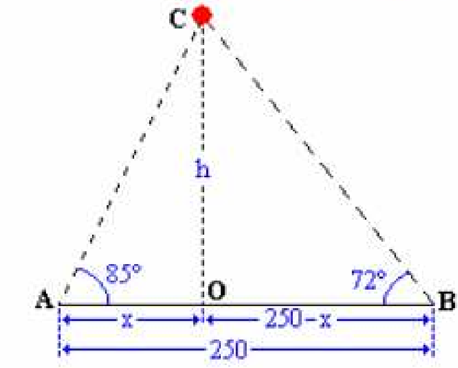
www.yoquieroaprobar.es

Cuestión 36.-

Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72º y 85º. A que altura se encuentra el globo. A que distancia del globo se encuentra cada observador.

Solución.

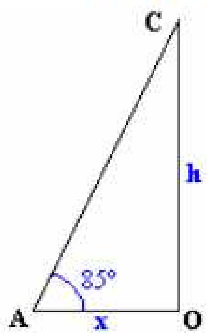
Problema de la doble observación ó doble tangente.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

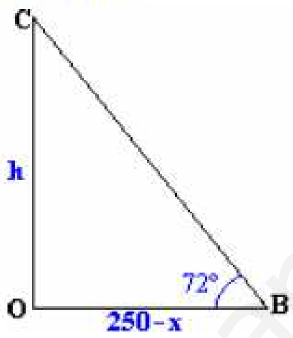
El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y BOC, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

Triángulo AOC:



$$\text{tg}\,85^\circ = \frac{h}{x}$$

Triángulo BOC:



$$\text{tg}\,72^\circ = \frac{h}{250-x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases}\text{tg}\,85^\circ = \dfrac{h}{x}\\ \text{tg}\,72^\circ = \dfrac{h}{250-x}\end{cases} : h = x\,\text{tg}\,85^\circ : \ \text{tg}\,72^\circ = \frac{x\,\text{tg}\,85^\circ}{250-x}$$

$$\text{tg}\,72^\circ(250-x) = x\,\text{tg}\,85^\circ \ : \ 250\,\text{tg}\,72^\circ - x\,\text{tg}\,72^\circ = x\,\text{tg}\,85^\circ \ : \ 250\,\text{tg}\,72^\circ = x\,\text{tg}\,85^\circ + x\,\text{tg}\,72^\circ$$

$$x(\text{tg}\,85^\circ + \text{tg}\,72^\circ) = 250\,\text{tg}\,72^\circ \ : \ x = \frac{250\,\text{tg}\,72^\circ}{\text{tg}\,85^\circ + \text{tg}\,72^\circ} \approx 53\text{ m}$$

$$h = 53\,\text{tg}\,85^\circ \approx 606'2\text{ m}$$

Las distancias de cada observador al globo se calculan con la definición de seno en cada uno de los triángulos.

- **Triángulo AOC:** $\text{sen}\,85^\circ = \dfrac{h}{\overline{AC}} : \overline{AC} = \dfrac{h}{\text{sen}\,85^\circ} = \dfrac{602'2}{\text{sen}\,85^\circ} \approx 604'3\text{ m}$
- **Triángulo BOC:** $\text{sen}\,72^\circ = \dfrac{h}{\overline{BC}} : \overline{BC} = \dfrac{h}{\text{sen}\,72^\circ} = \dfrac{602'2}{\text{sen}\,72^\circ} \approx 633\text{ m}$

Cuestión 37.-

Resolver los siguientes triángulos:

i. $b = 57 \ \ c = 100 \ \ \hat{A} = 57^\circ$ Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los dos.

Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}} = \sqrt{57^2 + 100^2 - 2\cdot 57\cdot 100\cos 57} = 83'9$$

Conocidos los tres lados, se calcula uno cualquiera de los ángulos que faltan por el teorema del coseno.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(83'9)^2 + 100^2 - 57^2}{2\cdot 83'9\cdot 100} = 0'82$$

$$\cos\hat{B} = 0'82 \Rightarrow \hat{B} = \arccos 0'82 = 34'7^\circ$$

www.yoquieroaprobar.es

Conocidos dos ángulos, el tercero se saca como diferencia hasta 180º.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \qquad \hat{C}=180-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=180º-(100º+34'7º)=45'3º$$

ii. $b=57 \;\; c=100 \;\; \hat{B}=57º$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad \operatorname{sen}\hat{C}=\frac{c}{b}\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{100}{57}\operatorname{sen}57º=1'47>1\Rightarrow \text{No tiene solución}$$

iii. $a=7 \;\; b=17 \;\; \hat{B}=76º$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \operatorname{sen}\hat{A}=\frac{a}{b}\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{7}{17}\operatorname{sen}76º=0'40<1\Rightarrow \text{Tiene solución}$$

Como además $\frac{7}{17}<1$, la solución es única, y el ángulo $\hat{A}$ es agudo.

$$\operatorname{sen}\hat{A}=0'40 \qquad \hat{A}=\operatorname{arcsen}0'40=23'5º$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \qquad \hat{C}=180-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=180º-(23'5º+76º)=80'5$$

El lado que falta se calcula por el teorema del seno.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad c=b\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}}=17\cdot\frac{\operatorname{sen}80'5º}{\operatorname{sen}76º}=17'3$$

iv. a =12, b = 15, c = 18. Conocidos los tres lados, los dos primeros ángulos se calculan por el teorema del coseno, y el tercero por la suma de ángulos.

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A} \qquad \cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}=\frac{15^2+18^2-12^2}{2\cdot15\cdot18}=-0'45 \qquad \hat{A}=116'7º$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B} \qquad \cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=\frac{12^2+18^2-15^2}{2\cdot12\cdot18}=0'56 \qquad \hat{B}=55'8º$$

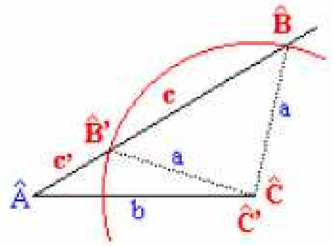
Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \qquad \hat{C}=180-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=180º-(116'7º+55'8º)=7'5º$$

v. $\hat{A}=30º$, a = 15, b = 20. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es comprobar si el triángulo tiene solución, para lo cual se aplica el teorema del seno a los datos que nos dan, despejando el seno del ángulo que se desconoce, en este caso $\operatorname{sen}\hat{B}$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \qquad \operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{20}{15}\operatorname{sen}30º=0'67<1 \text{ El triángulo tiene solución}$$

Teniendo en cuenta que $\left\{\begin{array}{l}\frac{b}{a}\operatorname{sen}\hat{A}<1\\ b>a\end{array}\right\}$ la solución es doble, es decir el ángulo $\hat{A}$ puede tomar dos valores, uno agudo $(\hat{B})$ y otro obtuso $(\hat{B}')$ que son suplementarios.



$$\operatorname{sen}\hat{B}=0'67\Rightarrow\hat{B}=\operatorname{arcsen}0'67=41'8º$$

$$\hat{B}'=180-\hat{B}=180-41'8=138'2º$$

Con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se calcula $\hat{C}$, con $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ se calcula $\hat{C}'$.

$$\hat{C}=180-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=180-(30+41'8)=108'2º$$

$$\hat{C}'=180-\left(\hat{A}+\hat{B}'\right)=180-(30+138'2)=11'8º$$

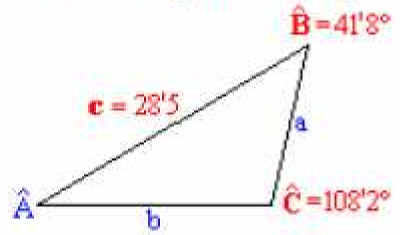
www.yoquieroaprobar.es

Con $\hat{C}$ se calcula c y con $\hat{C}'$ c' mediante el teorema del seno, aplicando entre a y c.

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} \qquad \Rightarrow \qquad c = a\frac{\text{sen }\hat{C}}{\text{sen }\hat{A}} = 15\frac{\text{sen }108'2^\circ}{\text{sen }30^\circ} = 28'5$$

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{c'}{\text{sen }\hat{C}'} \qquad \Rightarrow \qquad c = a\frac{\text{sen }\hat{C}'}{\text{sen }\hat{A}} = 15\frac{\text{sen }11'8^\circ}{\text{sen }30^\circ} = 6'1$$

Obteniéndose los siguientes triángulos:



vi. $\hat{B} = 95^\circ$, b = 12, c = 10. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Como el ángulo conocido es mayor de 90º (obtuso), el triángulo tendrá solución y será única, con la condición de que el lado opuesto al ángulo conocido (b) sea mayor que el lado contiguo (c).

$$b\ (12) > c\ (10)$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen }\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} \qquad \text{sen }\hat{C} = \frac{c}{b}\text{sen }\hat{B} = \frac{10}{12}\text{sen }95 = 0'83$$

$$\hat{C} = \text{arcsen }0'83 = 56'1^\circ$$

Conocido $\hat{C}$ se calcula $\hat{A}$ mediante la suma de ángulos.

$$\hat{A} = 180 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180 - (95 + 56'1) = 28'9^\circ$$

El lado que falta (a) se calcula mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\hat{B}} \qquad a = b\frac{\text{sen }\hat{A}}{\text{sen }\hat{B}} = 12\frac{\text{sen }28'9^\circ}{\text{sen }95^\circ} = 5'8$$

vii. b = 80, $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$. Conocidos dos ángulos y un lado.

Mediante la suma de ángulos se calcula el ángulo que falta $\left(\hat{C}\right)$.

$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (15 + 30) = 135^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y un lado, con el teorema del seno se calculan los lados que faltan.

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\hat{B}} \qquad a = b\frac{\text{sen }\hat{A}}{\text{sen }\hat{B}} = 80\frac{\text{sen }15^\circ}{\text{sen }30^\circ} = 41'4$$

$$\frac{b}{\text{sen }\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} \qquad c = b\frac{\text{sen }\hat{C}}{\text{sen }\hat{B}} = 80\frac{\text{sen }135^\circ}{\text{sen }30^\circ} = 113'1$$

www.yoquieroaprobar.es

viii. $a = 40,\ \hat{B} = 45^\circ,\ C = 75^\circ$. Conocidos dos ángulos y un lado.

El ángulo $\hat{A}$ se calcula como diferencia hasta 180º.

$$\hat{A} = 180 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180 - (45 + 75) = 60^\circ$$

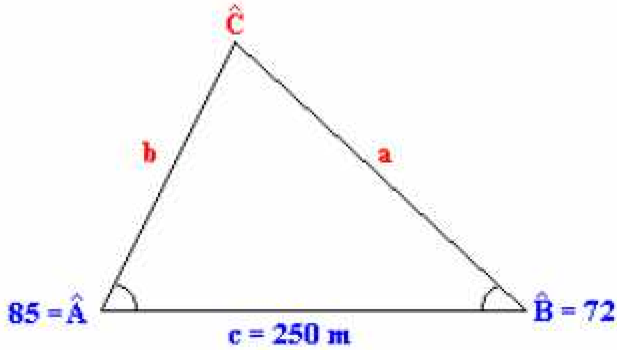
Conocidos los tres ángulo y un lado (a), los restantes lados se calculan con el teorema del seno, utilizando en ambos casos a y $\hat{A}$.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad b = a\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,45^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 32'7$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = a\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,75^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 44'6$$

Cuestión 38.-

Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72º y 85º. A que altura se encuentra el globo. A que distancia se encuentra cada observador del globo.



Solución.

Lo primero es calcular el ángulo que falta teniendo en cuenta que la suma de todos los ángulos vale 180º

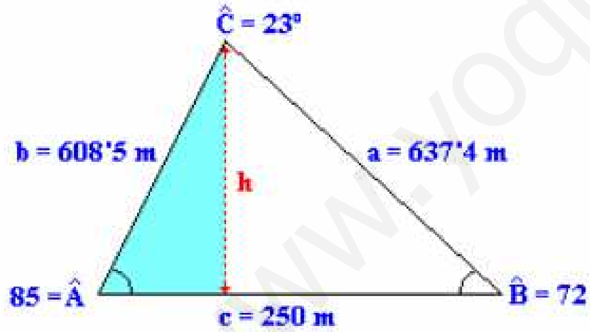
$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (85 + 72) = 23^\circ$$

Conocidos los tres ángulos y un lado los restantes se calculan mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \ : \ a = c\cdot\frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{C}} = 250\cdot\frac{\text{sen}85}{\text{sen}23} = 637'4\text{m}$$

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \ : \ b = c\cdot\frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} = 250\cdot\frac{\text{sen}72}{\text{sen}23} = 608'5\text{m}$$

Los observadores se encuentran a 637'4 m y a 608'5 m



Aplicando la definición de seno al ángulo A se calcula la altura del globo

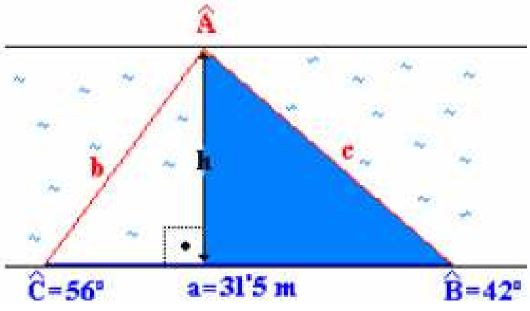
$$\text{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot\text{sen}\hat{A} = 608'5\cdot\text{sen}85 = 606'2\text{m}$$

Cuestión 39.-

Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto C de la orilla opuesta. Las visuales forman con la orilla unos ángulos de 42º y 56º respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 31,5 m

Solución.



La anchura del río (h) se puede obtener aplicando la definición del $\text{sen}\,\hat{B}$ al triángulo rectángulo resaltado en la figura.

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c\cdot\text{sen}\,\hat{B}$$

El lado c se calcula en el triángulo ABC, del que se conocen los ángulos $\hat{B}, \hat{C}$ y el lado a.

www.yoquieroaprobar.es

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \qquad \hat{A}=180-\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=180º-(42+56)=82º$$

Conocidos los tres ángulos y el lado a, se calcula el lado c mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad c=a\cdot\frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=31'5\cdot\frac{\operatorname{sen}56}{\operatorname{sen}82}=26'4\ \text{m}$$

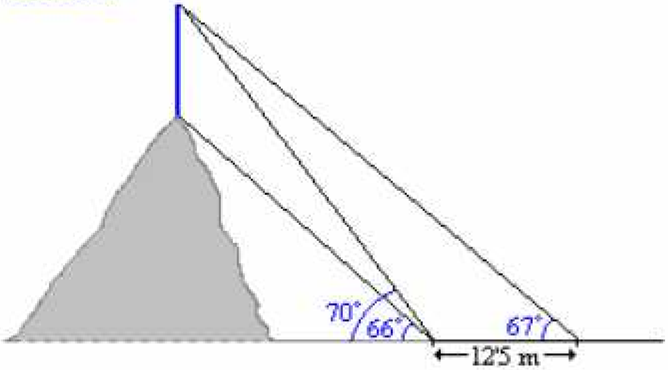
Conocido c se calcula la anchura del río.

$$h=c\cdot\operatorname{sen}\hat{B}=26'4\cdot\operatorname{sen}42=17'6\ \text{m}$$

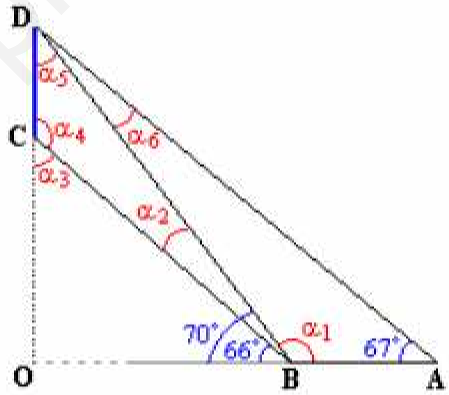
Cuestión 40.-

Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de 66º y 70º respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de 67º.

Solución.



Con la información del enunciado se pueden obtener una serie de triángulos, rectángulos y oblicuángulos, en los que calcular todos los ángulos únicamente con la condición de que la suma de ángulos es igual a 180º.



- **α_1**. Es suplementario al ángulo de 70º.

$$\alpha_1 = 180 - 70 = 110º$$

- **α_2**. Como diferencia de ángulos

$$\alpha_2 = 70 - 66 = 4º$$

- **α_3**: Complementario al ángulo de 66º.

$$\alpha_3 = 90 - 66 = 24º$$

- **α_4**. Suplementario a α_3.

$$\alpha_4 = 180 - 24 = 156º$$

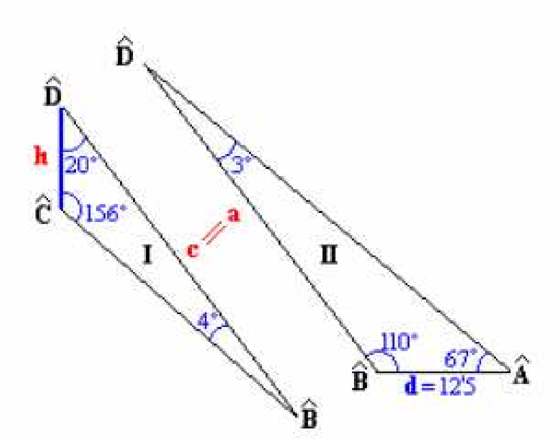
- **α_5**. En el triángulo BCD: $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180º$

$$\alpha_5 = 180 - (4 + 156) = 20º$$

- **α_6**. En el triángulo ABD: $67 + \alpha_1 + \alpha_6 = 180º$

$$\alpha_6 = 180 - (67 + 110) = 3º$$

www.yoquieroaprobar.es



Una vez conocidos todos los ángulos, el problema se resuelve mediante dos triángulos oblicuángulos que comparten un lado como muestra la figura.

En el triángulo I se calcula a mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{d}{\operatorname{sen}\hat{D}} \qquad a = d \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{D}}$$

$$a = 12'5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 67^\circ}{\operatorname{sen} 3^\circ} \approx 220$$

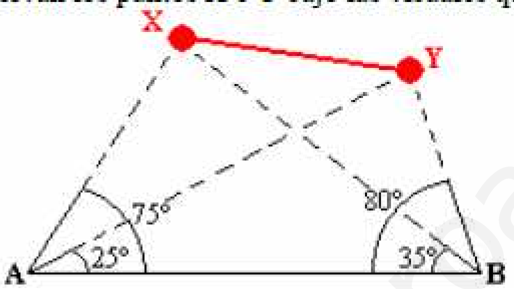
Teniendo en cuenta que a = c, en el triángulo II se calcula h con el teorema des seno.

$$\frac{h}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \qquad h = c \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

$$h = 220 \cdot \frac{\operatorname{sen} 4^\circ}{\operatorname{sen} 156^\circ} \approx 37'7 \text{ m}$$

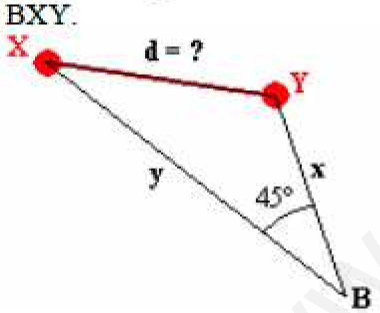
<u>Cuestión 41</u>.-

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



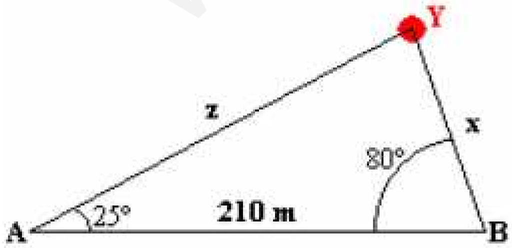
Solución.

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular **d**, necesitamos conocer **x** e **y**, que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- **x** se pude calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.



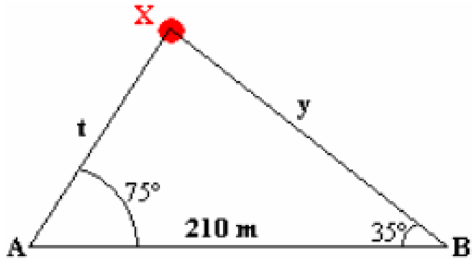
$$25^\circ + 80^\circ + \hat{Y} = 180^\circ \qquad \hat{Y} = 75^\circ$$

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{210}{\operatorname{sen} 75^\circ} \qquad x = 210 \frac{\operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ}$$

$$\mathbf{x} \approx 92 \text{ m}$$

- **y** se puede calcular en el triángulo ABX

www.yoquieroaprobar.es

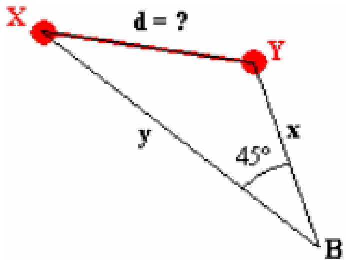


$$75^\circ + 35^\circ + \hat{X} = 180^\circ \qquad \hat{X} = 70^\circ$$

$$\frac{y}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{210}{\text{sen } 70^\circ} \qquad x = 210\,\frac{\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 70^\circ}$$

$$x \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos $\hat{B}$, **x** e **y** se calcula el valor de **d** mediante el teorema del coseno.



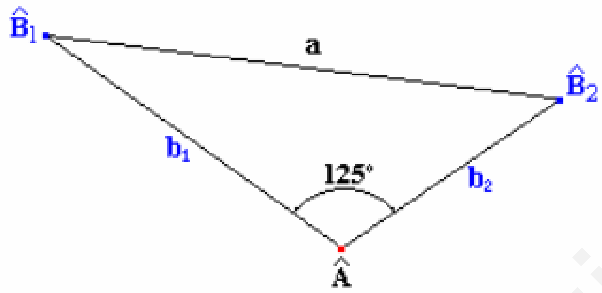
$$d^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot \cos \hat{B}$$

$$d = \sqrt{92^2 + 216^2 - 2 \cdot 92 \cdot 216 \cdot \cos 45^\circ} \approx 164 \text{ m}$$

Cuestión 42.-

Dos barcos salen de un puerto con rumbos distintos, formando ángulo de 127º. El primero partió a las 10 h. con velocidad de 17 Km./h. El segundo lo hizo a las 11'30 con velocidad de 26 Km./h. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 Km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen dos lados en función del tiempo y el ángulo que forman, y se pide la longitud del lado que falta. La solución se obtiene mediante el teorema del coseno.

Las longitudes de los lados conocidos se expresan en función del tiempo que llevan navegando los barcos y de sus velocidades respectivas mediante la ecuación del M.R.U. $s = s_o + v \cdot t$.

$$\begin{cases} b_1 = v_1 \cdot t_1 \\ b_2 = v_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

A las tres de la tarde (15'00), la distancia que separa a cada barco de puerto teniendo en cuenta la hora de partida de cada uno y sus respectivas velocidades es:

$$\begin{cases} b_1 = 17\,{}^{Km}\!/_{h} \cdot (15 - 10)h = 85\,Km \\ b_2 = 26\,{}^{Km}\!/_{h} \cdot (15 - 11'5)h = 91\,Km \end{cases}$$

Conocido b_1, b_2, y el ángulo que forman ($\hat{A}$), con el teorema del seno se calcula el lado que falta (a).

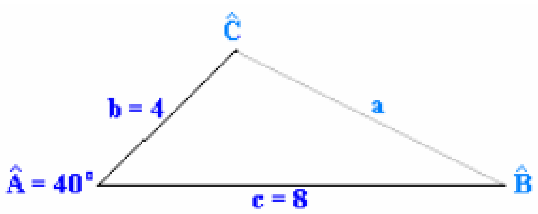
$$a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos \hat{A}} = \sqrt{85^2 + 91^2 - 2 \cdot 85 \cdot 91 \cdot \cos 125^\circ} = 156 \text{ Km}$$

Como la distancia entre los barcos es mayor que el alcance, no podrán ponerse en contacto.

Cuestión 43.-

En el triángulo ABC conocemos el ángulo $\hat{A} = 40^\circ$, y los lados b = 4 cm y c = 8 cm. Dibújalo. Traza la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice C y calcula sus medidas trigonométricamente.

Solución.



Triángulo oblicuángulo del que se conocen la longitud de dos de sus lados (b y c) y el ángulo que forman estos ($\hat{A}$).

Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta (a).

www.yoquieroaprobar.es

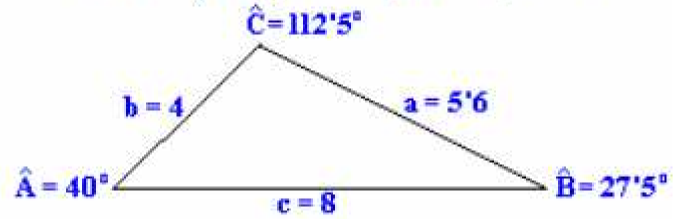
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \; : \; a = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2\cdot 4\cdot 8\cos 40^\circ} = 5'6$$

Conocidos todos los lados, se calcula el coseno de uno de los ángulos desconocidos a partir del teorema del coseno.

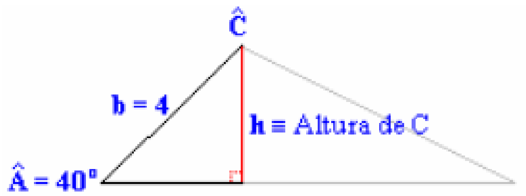
$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5'6^2 + 8^2 - 4^2}{2\cdot 5'6\cdot 8} = 0'89 \; : \; \hat{B} = \arccos 0'89 = 27'5^\circ$$

El último ángulo se obtiene como diferencia hasta 180º.

$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (40 + 27'5) = 112'5^\circ$$



Altura: Recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

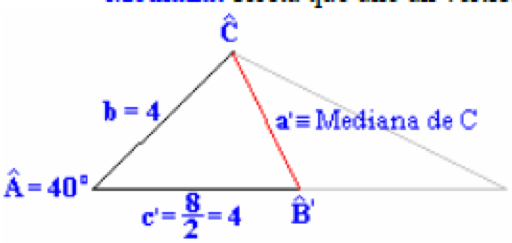


Se calcula por la definición de seno.

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cdot\operatorname{sen}\hat{A} = 4\cdot\operatorname{sen}40^\circ = 2'5$$

Mediana: Recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

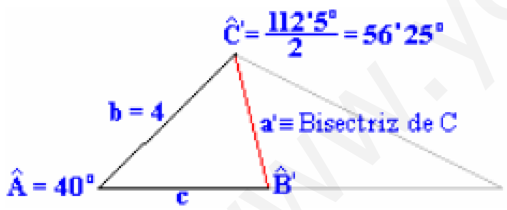


Se calcula por el teorema del coseno.

$$a' = \sqrt{b^2 + c'^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

$$a' = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cos 40} = 2'7$$

Bisectriz: Recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.



Por suma de ángulos se calcula $\hat{B}'$

$$\hat{B}' = 180 - \left(\hat{A} + \hat{C}'\right) = 180 - (40 + 56'25) = 83'75^\circ$$

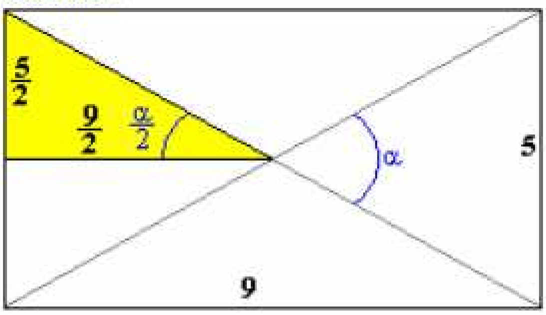
Mediante el teorema del seno se calcula la bisectriz de $\hat{C}$ (a´).

$$\frac{a'}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}'} \quad a' = b\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}'} = 4\frac{\operatorname{sen}40^\circ}{\operatorname{sen}83'75^\circ} = 2'6$$

Cuestión 44.-

Una mesa de ping-pong es un rectángulo de 9x5 pies. Calcula el ángulo que forman al cortarse las diagonales de dicho rectángulo.

Solución.



Observando la figura, el ángulo pedido se puede obtener por aplicación de la definición de tangente en el triángulo rectángulo coloreado.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{5/2}{9/2} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{5}{9} = 29^\circ \Rightarrow \alpha = 2\cdot 29^\circ = 58^\circ$$

www.yoquieroaprobar.es