Relación entre las razones trigonométricas

1) Calcular sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a. sen(α)=0.2 (cuadrante II)
b. cos(α)=-0.3 (cuadrante III)
c. tg(α)=2 (cuadrante I)

Solución

a. $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 0.2^2+\cos^2(\alpha)=1 \rightarrow \cos^2(\alpha)=0.96 \rightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{0.96}$

la solución es $\cos(\alpha)=-\sqrt{0.96}$ al ser del cuadrante II

$tg(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=-0.2/\sqrt{0.96}$

b. $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \rightarrow \text{sen}^2(\alpha)+(-0.3)^2=1 \rightarrow \text{sen}^2(\alpha)=0.91 \rightarrow \text{sen}(\alpha)=\pm\sqrt{0.91}$

la solución es $\text{sen}(\alpha)=-\sqrt{0.91}$ al ser del cuadrante III

$tg(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=\sqrt{0.91}/0.3$

c. $$\left.\begin{array}{r}\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ 2=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ 2\cos(\alpha)=sen(\alpha)\end{array}\right\}$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas fácilmente resoluble sustituyendo en la primera ecuación sen(α)=2cos(α):

$(2\cos(\alpha))^2+\cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 5\cos^2(\alpha)=1 \rightarrow \cos^2(\alpha)=1/5 \rightarrow \cos(\alpha)=\pm 1/\sqrt{5}$

la solución es $\cos(\alpha)=1/\sqrt{5}$ ya que es del cuadrante I $\rightarrow \text{sen}(\alpha)=2/\sqrt{5}$

2) Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a. $$\frac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$$

Solución: $$\frac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=\frac{1+tg^2(\alpha)}{1+\dfrac{1}{tg^2(\alpha)}}=\frac{1+tg^2(\alpha)}{\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{tg^2(\alpha)}}=tg^2(\alpha)$$

b. $$\frac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$$

Solución: $$\frac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\frac{1-sen^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\frac{(1-sen(\alpha))(1+sen(\alpha))}{(1+sen(\alpha))}=1-sen(\alpha)$$

c. $\sec^2(x)+\text{cosec}^2(x)=\sec^2(x)\cdot\text{cosec}^2(x)$

Solución: $$\sec^2(x)+\text{cosec}^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{1}{sen^2(x)}=\frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2=\sec^2(x)\cdot\cos ec^2(x)$$

3) Simplifica las siguientes expresiones

a. $(\text{sen}(x)+\cos(x))^2+(\text{sen}(x)-\cos(x))^2$

Solución: $(\text{sen}(x)+\cos(x))^2+(\text{sen}(x)-\cos(x))^2=$

$=\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)+2\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos(x)+\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)-2\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos(x)=$

$=2\cdot(\text{sen}^2(x)+\cos^2(x))=2\cdot 1=2$

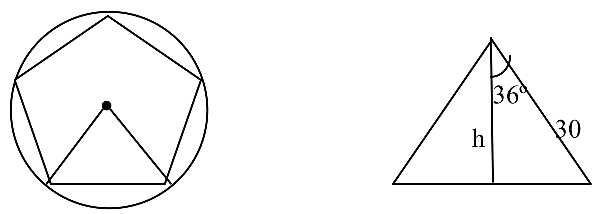
b. $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}$

Solución: $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)\cdot(sen^2(x)+\cos^2(x))}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)}{sen(x)}=1$

Problemas de geometría

4) Calcular el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30cm de radio. Calcular su área

Ángulo del pentágono → $\alpha=360º/5=72º$



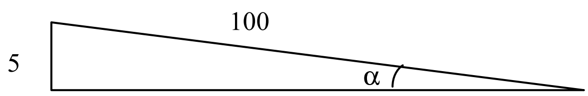
Lado pentágono=2x → sen(36º)=x/30 → x=30·sen(36º)=17.6cm

Perímetro=10·x=176cm

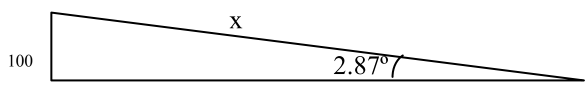
Apotema=h→ cos(36º)=x/30 → x=30·cos(36º)=24.3cm

área=$\dfrac{p\cdot ap}{2}=\dfrac{176\cdot 24.3}{2}=2138.4\cdot cm^2$

5) En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m en 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

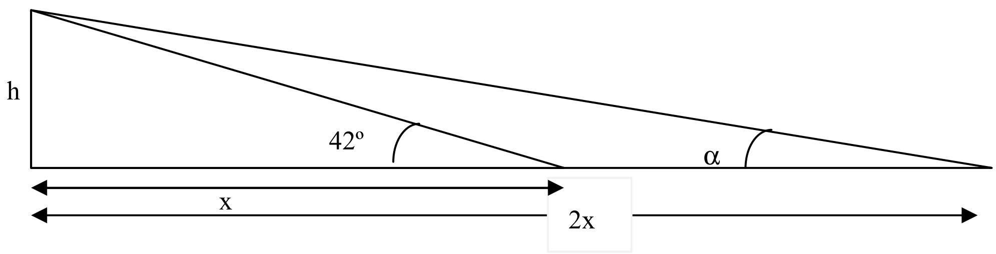


$\text{sen}(\alpha)=\frac{5}{100}=0.05$→ $\alpha=\text{arcsen}(0.05)=2.87º$



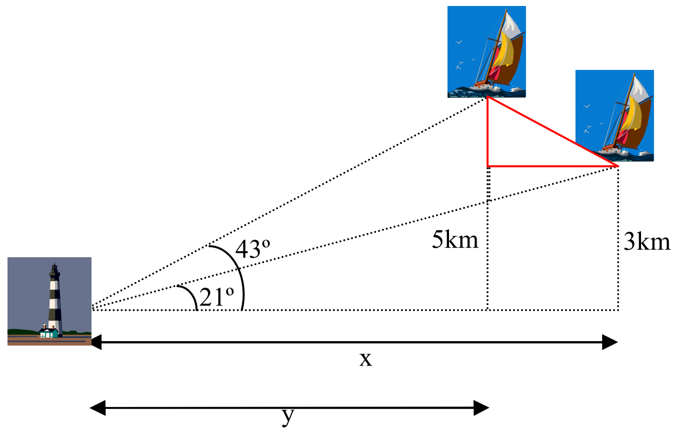
$\text{sen}(\alpha)=0.05=100/x$ → x=2000m

6) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?



tg(42º)=0.9=h/x → tg(α)=h/2x=0.45 → α=arctg(0.45)=24,2º

7) Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43º con la costa, y el barco B con 21º. El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcular distancia entre los barcos.



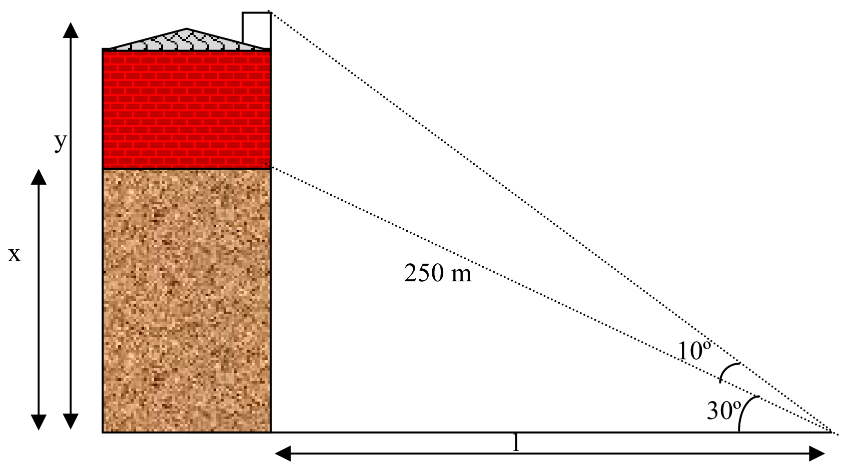
Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide 5km-3km=2km. El otro es y-x. Calculémoslo:

tg(21)=3/x → x=3/tg(21)=7.82km

tg(43º)=5/y → y=5/tg(43º)=5.4km

Así la distancia entre los dos barcos definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 2km y de (x-y)=2.42km→ d=$\sqrt{2^2 + (2.42)^2} = 3.14km$

8) Calcular la altura del edificio:



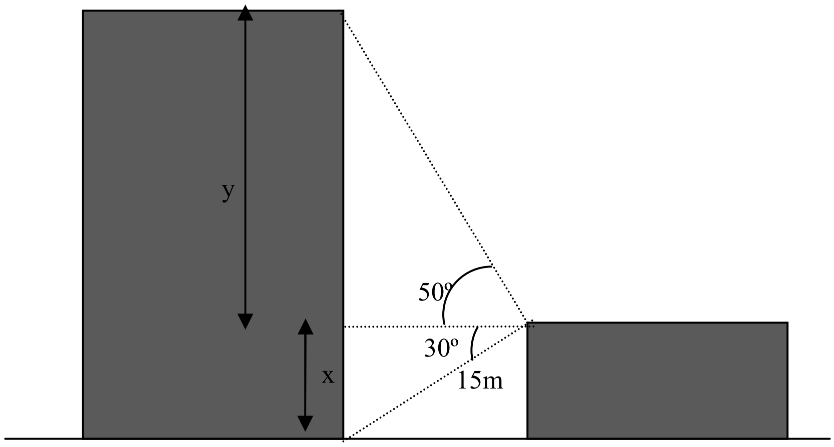
$sen(30º)=x/250 \rightarrow x=250\cdot sen(30º)=125m$

$cos(30º)=l/250 \rightarrow l= 250\cdot cos(30º)=216.5m$

$tg(40º)=y/l \rightarrow y=216.5m\cdot tg(40º)=181.2m$

$h_{casa}=y-x=56.2m$

9) Calcular la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo



$x=15\cdot sen(30º)=7.5m$

$l=15\cdot cos(30º)=13m$

$tg(50º)=y/l \rightarrow y=l\cdot tg(50º)=15.5m$

$altura=y+x=23m$

Ecuaciones.

10) Resolver las siguientes ecuaciones

a. $sen^2(x)-sen(x)=0$
b. $cos(x)+sen^2(x)=1$
c. $3tg^2(x)=sec^2(x)$
d. $sen(2x)=0.5$

Solución

a. $sen(x)=y \rightarrow y^2-y=0$, $y(y-1)=0 \rightarrow y=0, y=1$.

Si $y=0 \rightarrow sen(x)=0 \rightarrow x=arcsen(0)=\begin{cases} 0º+360k \\ 180º+360k \end{cases}$

Si $y=1 \rightarrow sen(x)=1 \rightarrow x=arcsen(1)=90º+360k$

b. Tenemos expresar la ecuación sólo en función del seno o del coseno, para esto utilizamos $sen^2(x)+cos^2(x)=1 \rightarrow sen^2(x)=1-cos^2(x)$

$cos(x)+sen^2(x)=1 \rightarrow cos(x)+1-cos^2(x)=1 \rightarrow cos(x)-cos^2(x)=0$

Llamando $y=cos(x)$ la ecuación será:

$y-y^2=0 \rightarrow y(y-1)=0$ $y=0, y=1$.

Si y=0→ cos(x)=0 → x=arccos(0)=$\begin{cases} 90^\circ+360k \\ 270^\circ+360k \end{cases}$

Si y=1 →cos(x)=1 → x=arccos(1)=$0^\circ+360k$

c. $3tg^2(x)=sec^2(x)$ →

$$3\cdot\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)} \to sen^2(x)=\frac{1}{3} \to sen(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \to$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 35{,}26^\circ+360k \\ 180^\circ-35{,}26^\circ=144.74^\circ+360k \end{cases}$$

$$x=arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 360^\circ-35{,}26^\circ=324{,}74^\circ+360k \\ 180^\circ+35{,}26^\circ=215.26^\circ+360k \end{cases}$$

d. sen(2x)=0.5 → 2x=arcsen(0.5)=$\begin{cases} 30^\circ+360k \\ 150^\circ+360k \end{cases}$ →

Si 2·x=30º+360k→ x=$\begin{cases} k=0 \to 15^\circ+360k \\ k=1 \to 195^\circ+360k \end{cases}$

Si 2·x=150º+360k→ x=$\begin{cases} k=0 \to 75^\circ+360k \\ k=1 \to 255^\circ+360k \end{cases}$

Teorema del seno y del coseno. Resolución triángulos no rectángulos

11) Resolver los siguientes triángulos

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

d) $\hat{C}$ = 45º, b=10m, c=6m

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

Este es el caso en el que puede haber dos soluciones. Veámoslo:

Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}} \to \frac{40}{sen(45^\circ)}=\frac{50}{sen(\hat{B})} \to sen(\hat{B})=0{,}884 \to \hat{B}=\begin{cases} \hat{B}_1=62{,}11^\circ \\ \hat{B}_2=117{,}89^\circ \end{cases}$$

Los dos ángulos son soluciones, pues la suma con $\hat{A}+\hat{B}<180^\circ$

Solución 1 : $\hat{B}_1 = 62{,}11^o$ → $\hat{C}_1 = 72{,}89^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen72.89^o}$ →c=54m

Solución 2 : $\hat{B}_2 = 117{,}89^o$ → $\hat{C}_2 = 17{,}11^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen17{,}11^o}$ →c=16,6m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

Este problema sólo puede tener una solución:

Apliquemos el teorema del coseno para calcular c:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})=25+9-30\cdot\cos(30)=8{,}02cm^2$ → c=2,84cm

Teorema del seno para calcular $\hat{A}$: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{5}{sen\hat{A}} = \frac{2{,}84}{sen30} \to \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 62^o \\ \hat{A}_2 = 118^o \end{cases}$

Las dos soluciones parecen válidas, luego lo comprobaremos:

Solución 1:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=62º, $\hat{B}$=88º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

Solución 2:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=118º, $\hat{B}$=32º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

En este caso la solución 1 no es válida,pues cuanto mayor sea el lado mayor el ángulo. Y en la solución 1 vemos como a es el mayor lado y $\hat{A}$ no es el mayor ángulo.

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

Podemos fácilmente calcular el otro ángulo $\hat{B} = 180 - 60 - 45$=75º

Utilicemos el teorema del seno para calcular los 2 lados que faltan:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \begin{cases} \frac{a}{sen45} = \frac{20}{sen75} \to a = 14{,}6m \\ \frac{20}{sen75} = \frac{c}{sen60} \to c = 17.9m \end{cases}$$

d) $\hat{C}$ = 45º, b=10m, c=6m

Utilicemos el teorema del seno para calcular el ángulo $\hat{B}$

$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{10}{sen\hat{B}} = \frac{6}{sen45^o} \to sen\hat{B} = 1{,}17$ → No solución

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

Por el teorema del coseno obtendremos el ángulo deseado:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A} \to 25 = 16 + 16 - 32\cdot\cos(\hat{A}) \to \hat{A} = 77{,}36^o$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B} \to 16 = 25 + 16 - 40\cdot\cos\hat{B} \to \hat{B} = 51{,}32^o$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 51{,}32^o$$