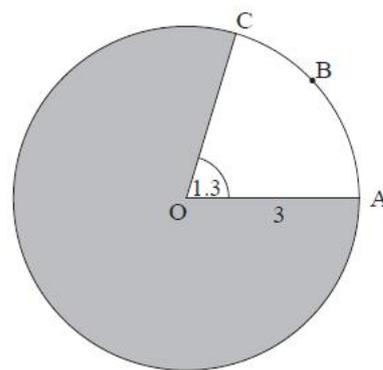


## Trigonometría

*Salvo indicación contraria, las soluciones se redondearán con tres cifras significativas*

1. El diagrama muestra un círculo de 3 cm de radio con un ángulo central de 1.3 radianes. Halle la longitud del arco ABC y el área de la región sombreada.



2. Escribe otro ángulo positivo menor de  $360^\circ$  que:

- a) tenga un seno igual al de  $217^\circ$
- b) tenga un seno igual al de  $15^\circ$
- c) tenga un coseno igual al de  $101^\circ$
- d) tenga un coseno igual al de  $27^\circ$
- e) tenga una tangente igual a la de  $41^\circ$
- f) tenga una tangente igual a la de  $153^\circ$

3. Escribe, aproximadas al grado más cercano, los dos los ángulos positivos menores de  $360^\circ$  que cumplan:

- |                              |                                |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $\text{sen } x = 0'5983$  | b) $\text{cosec } x = -1'0457$ |
| c) $\text{cos } x = -0'7583$ | d) $\text{sec } x = 1'2690$    |
| e) $\text{tg } x = 0'47960$  | f) $\text{ctg } x = -1'19572$  |

4. Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo agudo cuyo seno es 0'8.

- a) Con calculadora
- b) Sin calculadora

5. Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo agudo cuya secante es 2'6.

- a) Con calculadora
- b) Sin calculadora

6. Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo agudo cuya tangente es 0'5.

- a) Con calculadora
- b) Sin calculadora

7. Resuelva la ecuación  $3\cos x = 5\text{sen } x$  siendo  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ , dando las respuestas aproximando al grado más cercano.

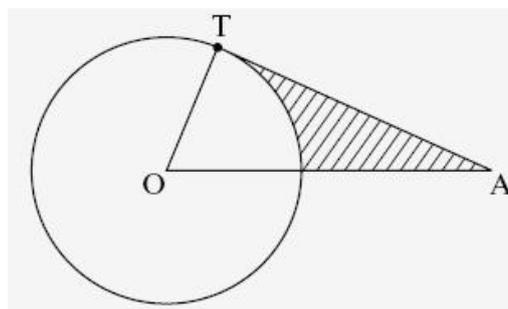
8. Si A es un ángulo obtuso y  $\text{sen } A = \frac{5}{13}$ , calcule el valor exacto de  $\text{sen } 2A$

9. a) Escriba la expresión  $3\text{sen}^2 x + 4\cos x$  en la forma  $a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c$

b) Con esto, o de otra manera, resuelva la ecuación:  $3\text{sen}^2 x + 4\cos x = 0$  siendo  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

10. En el siguiente diagrama, O es el centro de la circunferencia y [AT] es su tangente en el punto T

Si  $OA = 12$  cm, y la circunferencia tiene un radio de 6 cm, halle el área de la región sombreada



11. En un triángulo isósceles el lado menor mide 12m. Resuélvelo sabiendo que hay dos ángulos de  $70^\circ$ .

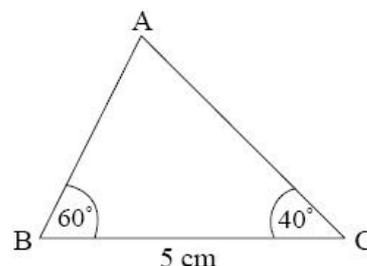
12. Sea un triángulo con lados 5 cm, 7 cm, 8 cm.

- a) Halle, en grados, la medida del menor de sus ángulos
- b) Halle el área del triángulo

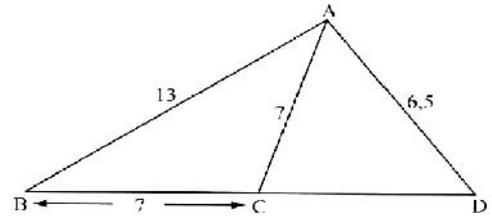
13. Calcule el área de un pentágono regular de 20m de lado

14. La siguiente figura muestra un triángulo ABC, donde  $BC = 5$  cm,  $B = 60^\circ$  y  $C = 40^\circ$

- a) Calcule AB
- b) Halle el área del triángulo

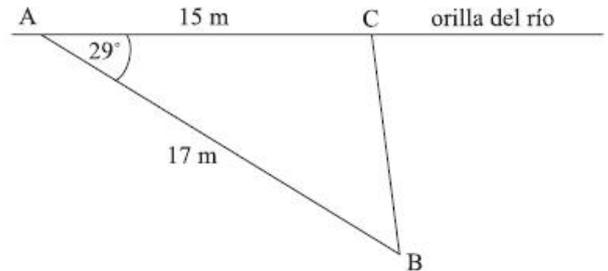


15. La siguiente figura muestra un triángulo ABD, donde  $AB = 13$  cm y  $AD = 6,5$  cm. Sea C un punto perteneciente a la recta BD, tal que  $BC = AC = 7$  cm.



- Halle la medida del ángulo ACB
- Halle la medida del ángulo CAD

16. La siguiente figura muestra una región triangular formada por un seto [AB], parte de la orilla de un río [AC] y una cerca [BC]. El seto tiene 17 m de largo y  $BAC$  mide  $29^\circ$ . El final de la cerca, el punto C, se puede situar en cualquier lugar a lo largo del río.



- Suponiendo que el punto C está a 15 m de A, halle la longitud de la cerca [BC]
- El granjero tiene otra cerca más larga. Con ella se podrían formar dos regiones triangulares distintas. El granjero coloca la cerca de modo que ABC mida  $85^\circ$ .
  - Halle la distancia entre A y C
  - Halle el área de la región ABC con la cerca situada en esa posición
- Para formar la segunda región, el granjero mueve la cerca de modo que el punto C esté más próximo al punto A. Halle la distancia que existe ahora entre A y C
- Halle la distancia mínima que ha de tener la cerca [BC] para encerrar una región triangular ABC.

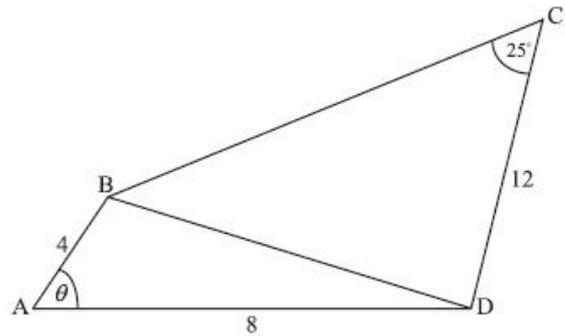
17. El siguiente diagrama muestra un cuadrilátero ABCD.  $AB = 4$ ,  $AD = 8$ ,  $CD = 12$ ,  $BCD = 25^\circ$ ,  $BAD = \theta$

- Use el teorema del coseno para demostrar que

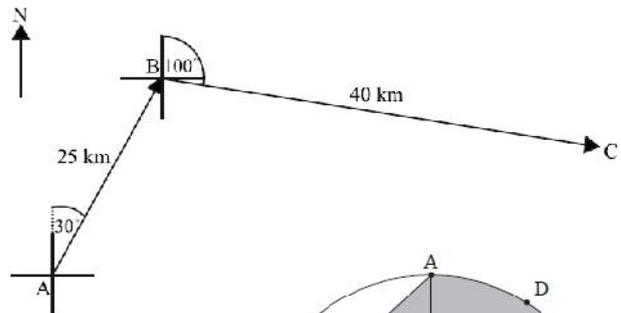
$$BD = 4 \cdot \sqrt{5 - 4 \cos \theta}$$

Sea  $\theta = 40^\circ$

- Halle el valor del  $\sin CBD$
  - Halle los dos posibles valores de  $CBD$
  - Suponiendo que  $CBD$  es un ángulo agudo, halle el perímetro de ABCD
- Halle el área del triángulo ABD



18. Un barco abandona el puerto A con un acimut de  $030^\circ$ . Navega durante 25 km hasta el punto B. Allí, el barco cambia de rumbo a un acimut de  $100^\circ$ . Navega 40 km hasta alcanzar el punto C. La información está mostrada en el diagrama anexo. Un segundo barco abandona el puerto A y navega directamente a C



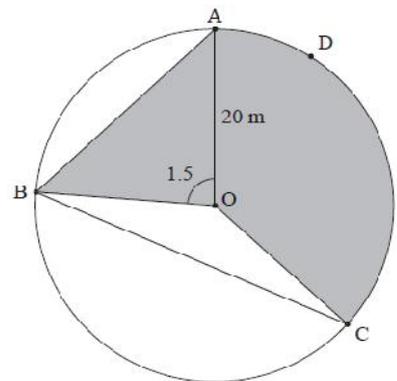
- Halle la distancia que recorre el segundo barco
- Halle el acimut del rumbo tomado por el segundo barco

19. El siguiente diagrama muestra un área infantil circular ABCD. El centro del círculo es O y tiene un radio de 20m. Los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia. El ángulo AOB mide 1,5 radianes.

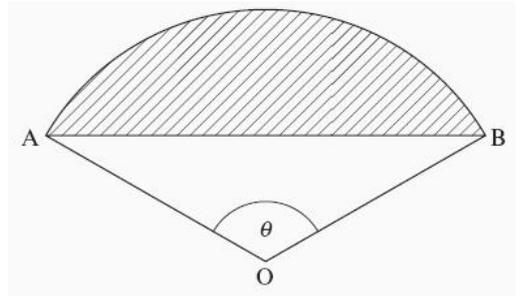
- Halle la longitud de la cuerda AB
- Halle el área del triángulo AOB

El ángulo BOC mide 2,4 radianes.

- Halle la longitud del arco ADC
- Halle el área de la región sombreada
- La región sombreada va a ser pintada de rojo. La pintura roja se vende en latas de \$32. Cada una alcanza para  $140m^2$ . ¿Cuánto nos va a costar la pintura?



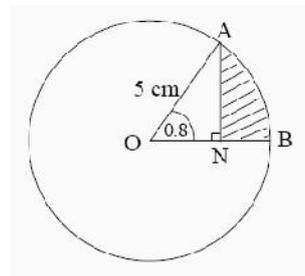
20. Considere la ecuación trigonométrica  $2\text{sen}^2 x = 1 + \text{cos} x$  en la forma  $a \cdot \text{cos}^2 x + b \cdot \text{cos} x + c$
- Escriba esta en la forma  $f(x) = 0$ , donde  $f(x) = a \cdot \text{cos}^2 x + b \cdot \text{cos} x + c$  y  $a, b, c \in \mathbb{Z}$
  - Factorice  $f(x)$
  - Resuelva  $f(x) = 0$  donde  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$



21. El diagrama muestra un sector AOB de un círculo de 15 cm de radio y centro O. El ángulo central  $\theta$  mide 2 radianes.
- Calcule el área del sector AOB
  - Calcule el área de la región sombreada
22. Resuelva la ecuación  $2\text{cos}^2 x = \text{sen}2x$  para  $0 \leq x \leq f$ , expresando las respuestas en función de  $\pi$

23. En un triángulo isósceles el lado mayor mide 30cm. Resuélvelo sabiendo que hay un ángulo de  $130^\circ$ .
24. En una circunferencia de 10 cm de radio se unen dos puntos con una cuerda de 15 cm. Calcula su ángulo central.

25. El diagrama muestra una circunferencia de 5 cm de radio con centro en O. Los puntos A y B están sobre la circunferencia y AOB mide 0,8 radianes. El punto N está situado sobre [OB] de forma que [AN] es perpendicular a [OB]. Halle el área de la región sombreada-

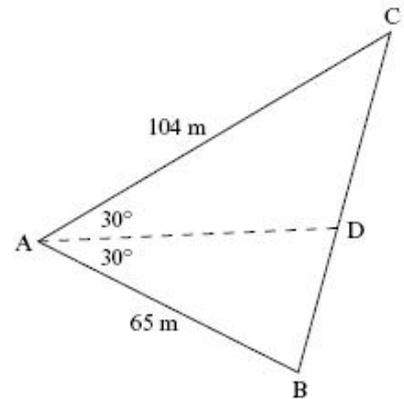


26. Un granjero posee un campo triangular ABC. Un lado del triángulo, [AC] mide 104 m, un segundo lado, [AB] mide 65 m y el ángulo entre esos dos lados es de  $60^\circ$ .
- Use el teorema del coseno para calcular la longitud del tercer lado del campo

- Sabiendo que  $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , exprese el área del campo en la forma  $p\sqrt{3}$  siendo p un número entero.

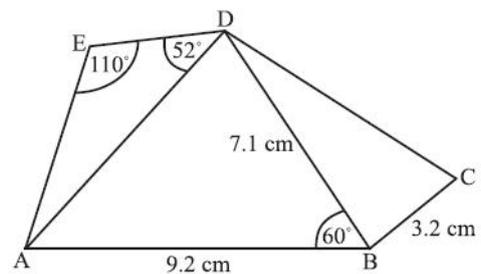
El granjero divide el campo en dos partes construyendo una valla recta [AD] de x metros que biseca el ángulo de  $60^\circ$ , como se ve en el diagrama.

- Demuestre que el área más pequeña viene dada por  $\frac{65x}{4}$  y obtenga una expresión similar para el área más grande.
- i) ¿Qué se puede decir del  $\text{sen}ADC$  y del  $\text{sen}ADB$ ?



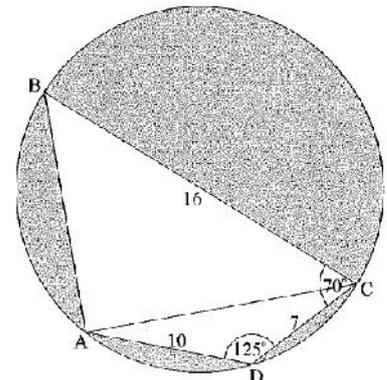
- ii) Use este resultado para demostrar que  $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{8}$

27. El siguiente diagrama muestra un pentágono ABCDE, con AB = 9,2 cm, BC = 3,2 cm, BD = 7,1 cm, AED =  $110^\circ$  y ABD =  $60^\circ$
- Halle AD y DE
  - El área del triángulo BCD es  $5,68 \text{ cm}^2$ . Halle DBC
  - Halle AC
  - Halle el área del cuadrilátero ABCD



28. Demuestra la identidad:  $\text{sen}^3 r + \text{cos}^3 r \cdot \text{tg} r = \text{sen} r$ ,
29. Resuelva la ecuación:  $2\text{cos} x = \text{sen}2x$  para  $0 \leq x \leq 3f$ ,

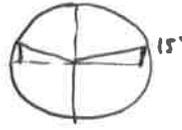
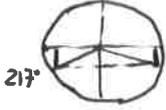
30. El diagrama muestra un círculo de radio 8m, siendo BC uno de sus diámetros. Los puntos A, B, C y D pertenecen a la circunferencia. BC = 16m, CD = 7m, AD = 10m, ADC =  $125^\circ$  y BCD =  $70^\circ$ ,
- Halle la longitud de la cuerda AC
  - Halle los ángulos ACD y ACB
  - Halle el área del triángulo ADC
  - Halle el área de la región sombreada



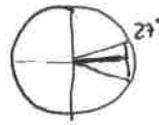
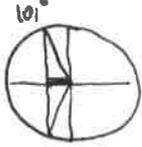
①  $\alpha = 1 \text{ radian}$   
 $R = 5 \text{ cm}$  }  $\Rightarrow \text{Arco} = \alpha \cdot R = 5 \text{ cm}$

Perimetro =  $2\pi \cdot 5 - 5 + 5 + 5 = 5(2\pi + 1) = \boxed{36'416 \text{ cm}}$

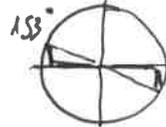
② a)  $\alpha = \begin{cases} 217^\circ \\ \boxed{323^\circ} = 360^\circ - (217^\circ - 180^\circ) \end{cases}$  b)  $\alpha = \begin{cases} 15^\circ \\ \boxed{165^\circ} = 180^\circ - 15^\circ \end{cases}$



c)  $\alpha = \begin{cases} 101^\circ \\ \boxed{259^\circ} = 360^\circ - 101^\circ \end{cases}$  d)  $\alpha = \begin{cases} 27^\circ \\ \boxed{333^\circ} = 360^\circ - 27^\circ \end{cases}$



e)  $\alpha = \begin{cases} 41^\circ \\ \boxed{221^\circ} = 180^\circ + 41^\circ \end{cases}$  f)  $\alpha = \begin{cases} 153^\circ \\ \boxed{333^\circ} = 153^\circ + 180^\circ \end{cases}$



③ a)  $\sin x = 0'5983 \Rightarrow x = \begin{cases} 37^\circ \\ 143^\circ \end{cases}$  b)  $\cos x = -1'0457 \Rightarrow x = \begin{cases} -73^\circ = \boxed{287^\circ} \\ \boxed{253^\circ} \end{cases}$

c)  $\tan x = -0'7583 \Rightarrow x = \begin{cases} 139^\circ \\ 271^\circ \end{cases}$  d)  $\sec x = 1'2690 \Rightarrow x = \begin{cases} 38^\circ \\ 322^\circ \end{cases}$

e)  $\tan x = 0'47960 \Rightarrow x = \begin{cases} 26^\circ \\ 206^\circ \end{cases}$  f)  $\cot x = -1'19572 \Rightarrow x = \begin{cases} -40^\circ = \boxed{320^\circ} \\ \boxed{140^\circ} \end{cases}$

④ a)  $\sin x = \boxed{0'8} \Rightarrow x = 53^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0'6 \rightarrow \sec x = 1'6 \\ \tan x = 1'3 \rightarrow \cot x = 0'75 \end{cases}$   
 $\hookrightarrow \csc x = 1'25$

b)  $\sin x = \boxed{0'8} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - 0'8^2} = \boxed{0'6} \Rightarrow \sec x = \boxed{1'6} = \frac{5}{3}$   
 $\tan x = \frac{0'8}{0'6} = \boxed{1'3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot x = \boxed{0'75}$   
 $\hookrightarrow \csc x = 1'25$

⑤ a)  $\sec x = \boxed{2'6} \Rightarrow x = 67^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0'923076 \rightarrow \csc x = 1'083 \\ \tan x = 2'4 \rightarrow \cot x = 0'416 \end{cases}$   
 $\hookrightarrow \cos x = 0'384615$

b)  $\sec x = \boxed{2'6} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2'6} = \boxed{0'384615} = \frac{5}{13}$   $\sin x = \sqrt{1 - 0'384615^2} = \boxed{0'923076} = \frac{12}{13}$   
 $\hookrightarrow \csc x = 1'083$   $\tan x = 2'4$   
 $\hookrightarrow \cot x = 0'416$

6) a)  $\tan x = 0.5 \Rightarrow x = 27^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0.4472 \rightarrow \csc x = 2.2361 \\ \cos x = 0.8944 \rightarrow \sec x = 1.1180 \end{cases}$   
 $\hookrightarrow \boxed{\cot x = 2}$

b)  $\tan x = 0.5 \Rightarrow 1 + 0.5^2 = \sec^2 x \Rightarrow \sec x = \sqrt{1 + 0.5^2} = \boxed{1.1180} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos x = 0.8944 = \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\hookrightarrow \boxed{\cot x = 2}$   
 $\sin x = \tan x \cdot \cos x = 0.4472 = \frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $\csc x = \boxed{2.2361} = \sqrt{5}$

7)  $3 \cos x = 5 \sin x \Rightarrow \tan x = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \begin{cases} 31^\circ \\ 211^\circ \end{cases}$

8)  $\sin A = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos A = \pm \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \pm 0.9231 = \pm \frac{12}{13}$   ~~$\frac{12}{13}$~~  porque A es obtuso.  
 $\frac{-12}{13}$

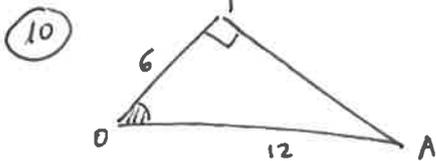
$\sin 2A = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{-12}{13} = \boxed{\frac{-120}{169}}$

9) a)  $3 \sin^2 x + 4 \cos x = 3(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x = \boxed{-3 \cos^2 x + 4 \cos x + 3}$

b)  $3 \sin^2 x + 4 \cos x = 0$   
 $-3 \cos^2 x + 4 \cos x + 3 = 0$

$\cos x = t \Rightarrow -3t^2 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{-6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{-3} =$

$= \begin{cases} +1.8685 \times \\ -0.1352 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 122^\circ \\ 238^\circ \end{cases}$



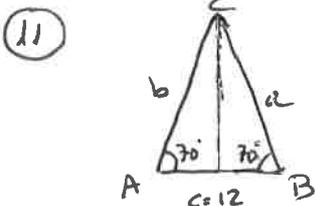
$AT = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$

Area  $\triangle OAT = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$\cos \hat{O} = \frac{6}{12} \Rightarrow \hat{O} = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

Area Sector =  $\frac{6^2 \cdot \pi/3}{2} = 6\pi \text{ cm}^2$

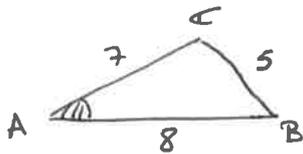
Area sombreada =  $18\sqrt{3} - 6\pi = \boxed{12.33 \text{ cm}^2}$



$\cos 70^\circ = \frac{6}{b} \Rightarrow b = \frac{6}{\cos 70^\circ} = \boxed{17.54 \text{ cm}} = a$  (porque es isósceles)

$\boxed{C = 40^\circ}$

12

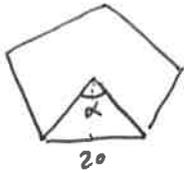


$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos A$$

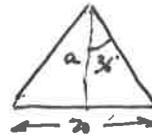
$$\cos A = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = 0.7857 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 38^\circ}$$

$$A_{\text{area}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot \sin 38^\circ}{2} = \boxed{17.32 \text{ m}^2}$$

13



$$\alpha = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

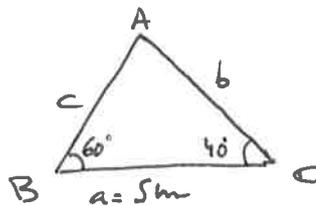


$$\tan 36^\circ = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{\tan 36^\circ} = 13.76 \text{ m}$$

$$A_{\text{area}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 13.76}{2} = \boxed{688.19 \text{ m}^2}$$

14

$$\hat{A} = 180 - 60 - 40 = 80^\circ$$



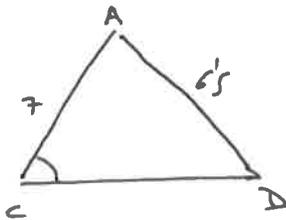
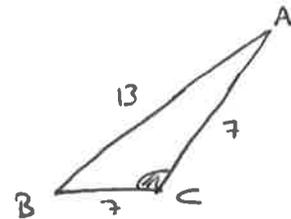
$$\frac{AB}{\sin 40^\circ} = \frac{5}{\sin 80^\circ}$$

$$c = AB = \frac{5 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \boxed{3.264 \text{ m}}$$

$$A_{\text{area}} = \frac{3.264 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \boxed{7.066 \text{ m}^2}$$

15

$$\cos \hat{A}CB = \frac{7^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 7} = -0.7245 \Rightarrow \boxed{\hat{A}CB = 136^\circ}$$

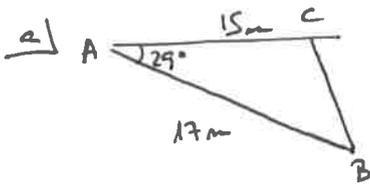


$$\hat{A}CD = 180 - \hat{A}CB = 44^\circ$$

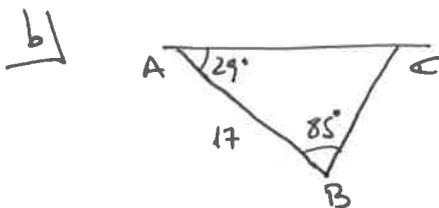
$$\frac{6.5}{\sin 44^\circ} = \frac{7}{\sin \hat{D}} \Rightarrow \sin \hat{D} = \frac{7 \cdot \sin 44^\circ}{6.5} = 0.7423 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{D} = 48^\circ \Rightarrow \hat{C}AD = 180 - 44 - 48 = \boxed{88^\circ}$$

16



$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 17^2 - 2 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \sin 29^\circ} = \boxed{8.243 \text{ m}}$$

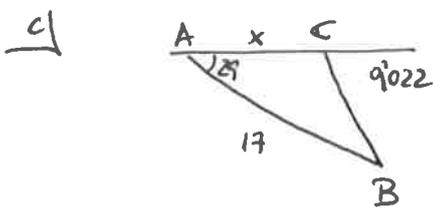


$$\hat{A}CB = 180 - 29 - 85 = 66^\circ$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 85^\circ} = \frac{17}{\sin 66^\circ} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{17 \sin 85^\circ}{\sin 66^\circ} = \boxed{18.538 \text{ m}}$$

$$A_{\text{area}} \hat{ABC} = \frac{17 \cdot 18.538 \cdot \sin 29^\circ}{2} = \boxed{76.393 \text{ m}^2}$$

$$\frac{BC}{\sin 29^\circ} = \frac{17}{\sin 66^\circ} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{17 \cdot \sin 29^\circ}{\sin 66^\circ} = 9.022 \text{ m}$$



$$9.022^2 = x^2 + 17^2 - 2x \cdot 17 \cdot \cos 29^\circ$$

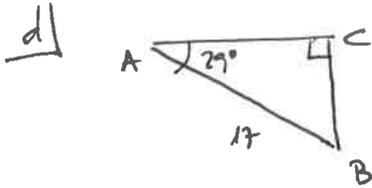
$$x^2 - 29.738x + 207.604 = 0$$

$$x = \frac{29.738 \pm \sqrt{29.738^2 - 4 \cdot 207.604}}{2} = \begin{cases} 18.54 \text{ m (Valor anterior)} \\ 11.20 \text{ m} \end{cases}$$

Também:  $\frac{9.022}{\sin 29^\circ} = \frac{17}{\sin \hat{A}CB} \Rightarrow \sin \hat{A}CB = \frac{17 \cdot \sin 29^\circ}{9.022} = 0.9135 \rightarrow \hat{A}CB = \begin{cases} 66^\circ \\ 114^\circ \end{cases}$

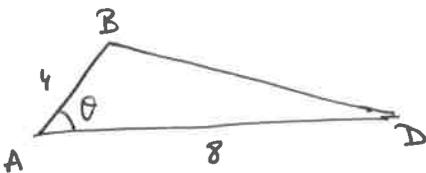
$$\hat{A}CB = 66^\circ \Rightarrow \hat{A}BC = 180 - 29 - 66 = 85^\circ \text{ (Apergado anterior)}$$

$$\hat{A}CB = 114^\circ \Rightarrow \hat{A}BC = 180 - 29 - 114 = 37^\circ \Rightarrow \frac{AC}{\sin 37^\circ} = \frac{9.022}{\sin 29^\circ} \Rightarrow AC = \frac{9.022 \sin 37^\circ}{\sin 29^\circ} = 11.2 \checkmark$$



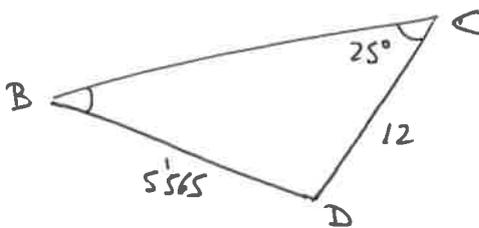
$$\sin 29^\circ = \frac{BC}{17} \Rightarrow BC = 8.242 \text{ m}$$

17



a)  $BD = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cos \theta} = \sqrt{80 - 64 \cos \theta} = 4\sqrt{5 - 4 \cos \theta} \checkmark$

b)  $\theta = 40^\circ \Rightarrow BD = 4\sqrt{5 - 4 \cos 40^\circ} = 5.565$



$$\frac{12}{\sin \hat{C}BD} = \frac{5.565}{\sin 25^\circ}$$

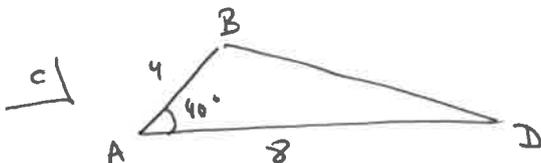
$$\sin \hat{C}BD = \frac{12 \cdot \sin 25^\circ}{5.565} = 0.9112$$

$$\sin \hat{C}BD = 0.9112 \Rightarrow \hat{C}BD = \begin{cases} 66^\circ \\ 114^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C}BD = 66^\circ \Rightarrow \hat{B}DC = 180 - 25 - 66 = 89^\circ$$

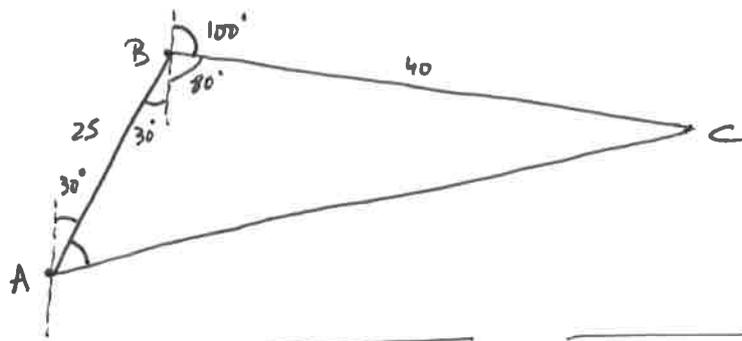
$$\frac{BC}{\sin 89^\circ} = \frac{5.565}{\sin 25^\circ} \Rightarrow BC = \frac{5.565 \cdot \sin 89^\circ}{\sin 25^\circ} = 13.167$$

Perimetro =  $24 + 13.167 = 37.732$



$$\text{Area} = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sin 40^\circ}{2} = 10.285$$

18



$$AC = \sqrt{25^2 + 40^2 - 2 \cdot 25 \cdot 40 \cdot \cos 110^\circ} = \boxed{53.936 \text{ Km}}$$

$$\frac{40}{\sin \hat{B}AC} = \frac{53.936}{\sin 110^\circ} \Rightarrow \sin \hat{B}AC = \frac{40 \cdot \sin 110^\circ}{53.936} = 0.6969 \Rightarrow \hat{B}AC = 44^\circ$$

$$\text{Acimut } 2^\circ \text{ barco} = 30 + 44 = \boxed{74^\circ}$$

19 a)  $AB = \sqrt{20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos 15^\circ} = \boxed{27.3 \text{ m}}$

b)  $\text{Area } \triangle AOB = \frac{20 \cdot 20 \sin 15^\circ}{2} = \boxed{199 \text{ m}^2}$

c)  $\hat{AOC} = 2\pi - 15 - 24 = 2\pi - 39 \text{ rad}$

Arco  $\widehat{ADC} = 20 \cdot (2\pi - 39) = \boxed{477 \text{ m}}$

d)  $\text{Area Sector } OADC = \frac{20^2 \cdot (2\pi - 39)}{2} = 477 \text{ m}^2$

Area sombreada =  $199 + 477 = \boxed{676 \text{ m}^2}$

e)  $676 \text{ m}^2 \cdot \frac{1 \text{ lata}}{140 \text{ m}^2} \cdot \frac{\$32}{1 \text{ lata}} = 155 \$$

No sería correcto este cálculo. La pintura se vende en latas.

$\frac{676}{140} = 4.8285 \dots \rightarrow 5 \text{ latas} \Rightarrow 5 \cdot 32 = \boxed{160 \$}$

