

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Los múltiplos de un número son los que lo contienen un número exacto de veces.

El 12 es múltiplo de 3 porque lo contiene 4 veces.

El 30 es múltiplo de 5 porque lo contiene 6 veces.

Los múltiplos de un número se calculan multiplicando este número por los números naturales = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Los múltiplos de un número son infinitos.

Múltiplos de 2 = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}

Múltiplos de 3 = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36}

Múltiplos de 11 = {0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132}

MÚLTIPLOS COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Calculados los conjuntos de los múltiplos de dos o más números siempre podemos encontrar múltiplos comunes.

M (3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60 ...}

M (4) = {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64,}

M (8) = {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88}

Múltiplos comunes de 3 y 4 = {0, 12, 24, 36, 48, 60 ...}

Múltiplos comunes de 3, 4 y 8 = {0, 24, 48.....}

Mínimo común múltiplo de varios números (m.c.m.).- Se llama así al menor de los múltiplos comunes de dichos números excluido el cero.

m.c.m.(3, 4) = 12

m.c.m.(2, 4, 8) = 24

DIVISORES DE UN NÚMERO

Divisor de un número es aquel que está contenido en él un número exacto de veces. Al dividir un número por sus divisores el resto es cero.

El 5 es divisor de 15 porque lo contiene tres veces. $15 : 5 = 3$ y resto 0.

Observa la relación: 5 es **divisor** de 15 \longleftrightarrow 15 es **múltiplo** de 5

Un número es **divisible** por otro cuando lo contiene un número exacto de veces. Un número es divisible por todos sus divisores.

D (5) = {1, 5}

D (6) = {1, 2, 3, 6}

D (8) = {1, 2, 4, 8}

D (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

D (20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Un número es divisor común de dos o más números si es divisor de todos ellos.

$$\left. \begin{array}{l} D(12) = \{1, 2, 3, 4, 12\} \\ D(15) = \{1, 3, 5, 15\} \end{array} \right\} \text{Divisores comunes de 12 y 15} = \{1, 3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \\ D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \end{array} \right\} \text{Divisores comunes de 18 y 24} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

$$\text{m.c.d.}(12, 15) = 3$$

$$\text{m.c.d.}(18, 24) = 6$$

NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

Números primos son aquellos que sólo son divisibles por sí mismo y por la unidad. Es decir, sólo tienen por divisores a sí mismo y a la unidad.

Números compuestos son los que además de ser divisibles por sí mismos y por la unidad tienen otros divisores.

$$\text{Números primos} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Nos permiten saber de un modo sencillo cuando un número es divisible por otro.

Número	CRITERIO
2	Un número es divisible por 2 cuando acaba en 0 o cifra par.
3	Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras da tres o múltiplo de 3.
4	Un número es divisible por 4 cuando lo es el número formado por sus dos últimas cifras.
5	Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 ó en 5.
6	Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3.
8	Un número es divisible por 8 cuando lo es el número formado por sus tres últimas cifras.
9	Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras da nueve o múltiplo de 9.
10	Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS.

Para descomponer un número en un producto de factores primos se procede según el ejemplo en el que vamos a descomponer paso a paso el número 60.

$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
Comprobamos si 60 es divisible por el primer n° primo (2) y dividimos	Comprobamos si el cociente anterior obtenido, 30 es divisible por 2 y dividimos	Coprobamos si 15 es divisible por 2, como no lo es lo hacemos con el siguiente n° primo el 3 y dividimos.	Por último, el resto obtenido (5) lo dividimos por el n° primo que se puede dividir, el mismo 5.

La descomposición factorial la expresaremos de la siguiente forma:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Las descomposiciones factoriales no se realizan en varias barras como en el ejemplo, sino que se hacen en una sola como en los siguientes ejemplos.

$\begin{array}{r l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$	$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$	$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$	$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

m.c.d. y m.c.m. A PARTIR DE LA DESCOMPOSICIÓN EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS

Para calcular el **m.c.d.** de dos o más números los descomponemos en su producto de factores primos y tomamos los factores comunes con el menor exponente.

Para calcular el **m.c.m.** de dos o más números los descomponemos en su producto de factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Utilizando las descomposiciones factoriales anteriores, observa:

m.c.d. (12, 50)	m.c.m (12, 50)	m.c.d. (60, 50)	m.c.m. (60, 50)
$12 = 2^2 \times 3$	$12 = 2^2 \times 3$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$50 = 2 \times 5^2$	$50 = 2 \times 5^2$	$50 = 2 \times 5^2$	$50 = 2 \times 5^2$
m.c.d. (12, 50) = 2	m.c.m (12, 50) =	m.c.d. (60, 50) =	m.c.d. (60, 50) =
	$2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$	$2 \times 5 = 10$	$2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$

Actividades:

1.- Halla cinco números que sean múltiplos de 5 y menores que 60.

2.- Clasifica estos números en múltiplos de 5 y en múltiplos de 9:

1, 0, 5, 36, 45, 18, 100, 9, 81, 21, 10

3.- Completa la serie de múltiplos de 3 hasta el 30.

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$

4.- Indica los cinco números que siguen en cada serie y completa.

a) 0, 2, 4, 6, son múltiplos de

b) 0, 5, 10, 15, son múltiplos de

c) 0, 7, 14, 21, son múltiplos de

4.- Escribe los diez primeros múltiplos de 6. ¿Es posible escribir todos los múltiplos de un número?

5.- Escribe 5 múltiplos de 8 mayores de 50

6.- Escribe 4 múltiplos de 9 mayores que 70.

7.- De los siguientes números, di cuáles son múltiplos de 4 y por qué lo son.

32, 15, 24, 20, 12, 13, 35

8.- Escribe los cinco primeros múltiplos de 8, 1 y 100

9.- Agrupa estos números según sean múltiplos de 2, de 5 y de 7

8, 119, 6, 7, 2, 21, 195, 15, 63, 55, 12

10.- Calcula los múltiplos comunes de 3 y 5 menores que 50.

11.- Señala cuales de los siguientes números son múltiplos comunes de 5 y de 7.

35, 10, 70, 14, 700, 140, 20

12.- Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

2 y 5 2 y 3 2 y 4 2 y 7

13.- a) ¿Es 8 múltiplo de 2? Calcula el mínimo común múltiplo de 2 y de 8.

b) ¿Es 9 múltiplo de 3? Calcula el mínimo común múltiplo de 3 y de 9.

c) ¿Es 25 múltiplo de 5? Calcula el mínimo común múltiplo de 5 y de 25.

d) ¿Qué observas?

14.- Indica cual de los siguientes números no es divisor de 90.

2, 4, 10, 15, 30

15.- Busca los seis divisores de 12.

16.- Busca todos los divisores de 15.

18.- Busca todos los divisores de 20.

19.- Comprueba con tres ejemplos, que cualquier número es divisible por 1 y por sí mismo.

20.- Indica que números de esta lista son divisibles por 4

21 24 28 45 50 52

21.- Fíjate en el resultado del ejercicio anterior y, sin hacer ninguna operación, contesta estas preguntas:

¿Pueden hacerse equipos de 4 jugadores con 28 personas sin que ninguna se quede sin jugar? ¿Y con 52 personas?

22.- Un número comprendido entre 60 y 67 es divisible por 7. ¿Sabes de qué número se trata?

23.- Ya sabes que $6 \times 3 = 18$. Sin hacer ningún cálculo completa:

- a) 18 es un múltiplo de y de
- b) 18 es divisible por y de
- c) 18 es un de 3.
- d) 6 es un divisor de
- e) 3 es un de 18.

24.- Comprueba cuál de estos números es divisible por 3 y por 7 a la vez.

21 84 36 7

25.- Calcula los divisores comunes de 12 y 20

26.- Calcula los divisores comunes de 25 y 30

27.- Calcula los divisores comunes de 12, 20 y 24.

28.- Teniendo en cuenta los ejercicios anteriores calcula:

m.c.d. (12, 20) = m.c.d. (25, 30) = m.c.d. (12, 20, 24) =

29.- Calcula los números primos comprendidos entre el 1 y el 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nº primos entre 1 y 100 = {.....
.....
.....

30.- Utilizando los criterios de divisibilidad completa la tabla.

Divisible por:

Número	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4.238										
576										
2.386										
4.109										
3.522										
6.600										
64										
600										
1.831										
7.290										
27.720										

31.- Realiza la descomposición factorial de los siguientes números:

$2.800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ 2.800 2 1.400 2 700 2 350 2 175 5 35 5 7 7 1	$672 =$ 672	$686 =$ 686	$2.352 =$ 2.352
$1.400 =$ 1.400	$1.225 =$ 1.225	$2.401 =$ 2.401	$735 =$ 735

32.- Utilizando los criterios de divisibilidad completa la tabla.

Divisible por:

Número	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
695										
45.000										
2.002										
7.323										
969										
84.268										
6.500										
2.000										
16.403										
9.999										
10.100										

33.- Realiza la descomposición factorial de los siguientes números:

Handwritten prime factorizations for the numbers listed in problem 33:

- $2.310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
- $1.078 = 2 \cdot 13 \cdot 41$
- $3.234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
- $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
- $2.200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$
- $1.936 = 2^4 \cdot 11^2$
- $5.929 = 7 \cdot 847$
- $7.700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

CÁLCULO MENTAL

$$\begin{array}{r}
 53 + 204 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 53 + 200 + 4 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 57 + 200 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 557
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 297 - 45 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 300 - 3 + 45 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 300 + 42 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 342
 \end{array}$$

$74+105=$

$607+37=$

$53+98=$

$61+208=$

$306+46=$

$16+99=$

$92+506=$

$209+21=$

$197+15=$

$37+402=$

$305+85=$

$295+36=$

$54+303=$

$604+37=$

$496+77=$

$35+97=$

$24+94=$

$794+85=$

1.- Sumar números completando centenas.

2.- Multiplicar cantidades acabadas en ceros.

$$\begin{array}{r}
 420 \times 300 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 42 \times 10 \times 3 \times 100 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 126 \times 1.000 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 126.000
 \end{array}$$

$40 \times 700=$

$20 \times 9.000=$

$130 \times 30=$

$50 \times 30=$

$3.000 \times 70=$

$210 \times 400=$

$900 \times 60=$

$8.000 \times 700=$

$700 \times 230=$

$200 \times 800=$

$400 \times 3.000=$

$60 \times 140=$

$60 \times 600=$

$90 \times 1.100=$

$180 \times 200=$

$40 \times 50=$

$300 \times 400=$

$80 \times 50=$

3.- Dividir cantidades acabadas en ceros.

$$\begin{array}{r}
 35.000 : 70 \\
 \boxed{35 \times 1.000} : \boxed{7 \times 10} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 35 : 7 \quad \times 1.000 : 10 \\
 5 \quad \times 100 = 500 \\
 \boxed{35.000 : 70 = 500}
 \end{array}$$

$80:20=$

$400:50=$

$500:20=$

$90:30=$

$200:40=$

$450:30=$

$250:50=$

$2700:90=$

$81000:900=$

$350:70=$

$1500:30=$

$12000:200=$

$1600:80=$

$300:150=$

$4000:40=$

$2400:600=$

$2400:400=$

$50000:200=$

34.- Calcula por descomposición factorial el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes pares de números. (En el cuaderno).

121 y 39

45 y 38

90 y 50

35.- Calcula por descomposición factorial el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes tríos de números. (En el cuaderno).

45, 55, 150

18, 36, 54

9, 12, 16

36.- Juan va a visitar a su abuela cada 12 días y su prima cada 18 días. ¿Cada cuántos días coinciden en casa de su abuela?

Datos que me dan:

Operaciones

Datos que me piden:

Solución:

37.- Un frutero tiene 180 kg de manzanas y 160 kg de naranjas. Quiere ponerlas en bolsas iguales. ¿Cuántos kg podrá poner como máximo en cada bolsa y cuántas bolsas necesitará para cada fruta?

Datos que me dan:

Operaciones

Datos que me piden:

Solución:

38.- Un pasillo de 860 cm de largo y 240 cm de ancho se ha solado con baldosas cuadradas, de la mayor dimensión posible, para que quepa en cada lado un número exacto de ellas.

a) ¿Cuánto mide de lado cada baldosa?

b) ¿Cuántas baldosas se emplearon?

Datos que me dan:

Operaciones

Datos que me piden:

Solución:

39.- Tres barcos salen de un puerto: el primero, cada 2 días; el segundo, cada 6; y el tercero, cada 8. Si salieron juntos el 1 de mayo, ¿qué día volverán a salir juntos otra vez?

Datos que me dan:

Operaciones

Datos que me piden:

Solución:

40.- En un recipiente hay 120 litros de aceite de oliva y en otro 100 litros de aceite de girasol. Queremos embotellar el aceite en garrafas del tamaño mayor posible. ¿Qué capacidad deben de tener estas garrafas si queremos embotellar los dos tipos de aceite por separado y no queremos que sobre nada?

Datos que me dan:

Operaciones

Datos que me piden:

Solución:

En el salón de un hotel hay 18 personas. En otro salón hay 24 personas. Se tienen que trasladar, pero:

- a) Sólo existe un coche.**
- b) En cada viaje, el coche debe ir lleno.**
- c) No puede quedar ninguna persona en ninguno de los dos salones después del último viaje.**
- d) El coche tiene que hacer el menor número posible de viajes.**

¿Para cuantos viajeros tiene que tener capacidad el coche?