PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Usaremos tres incógnitas:

$x \rightarrow$ La edad de la madre
$y \rightarrow$ La edad del hijo mayor
$z \rightarrow$ La edad del hijo menor

Del enunciado se deducen tres igualdades:

Hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento $\rightarrow x - 14 = 5(y - 14 + z - 14)$

Dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento $\rightarrow x + 10 = y + 10 + z + 10$

Cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años $\rightarrow$ $z + x - y = 42$

Planteamos y resolvemos el sistema formado por las tres igualdades:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 14 = 5(y - 14 + z - 14) \\ x + 10 = y + 10 + z + 10 \\ z + x - y = 42 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{array}\right| \; 2z = 32 \Rightarrow z = 16$$

$$\left|\begin{array}{l} x - 5y = -46 \\ x - y = 26 \end{array}\right| \quad 4y = 72 \Rightarrow y = 18; x - 18 = 26 \Rightarrow x = 44$$

La solución de nuestro sistema es $\left\{\begin{array}{l} x = 44 \\ y = 18 \\ z = 16 \end{array}\right.$

Solución La madre tiene 44 años y los hijos tienen 18 y 16 años.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene un menor de orden dos no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6+2 = 8$, luego $rg(A) \geqslant 2$

El rango de A será 3 cuando el menor de orden dos no nulo se pueda ampliar con alguna de las otras dos columnas a un menor de orden tres no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{vmatrix} = -(a+4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(a+4) \cdot 8 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 15a + 8 + 10 - 3a + 24 = 12a + 48 = 0 \Rightarrow a = -4$$

Solución Si $a = -4$ el rango de A es 2; en cualquier otro caso es 3.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144\ ;\ C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

C_1 es una elipse con semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

Sus vértices son $A = (4, 0)$, $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$

Llamamos c a la semidistancia focal; $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

Los focos son $F = (\sqrt{7}, 0)$ y $F' = (-\sqrt{7}, 0)$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0,6614$ y no tiene asíntotas.

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{\frac{144}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

C_2 es una hibérbola con semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

Sus vértices son $A = (4, 0)$, $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$

Llamamos c a la semidistancia focal; $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Los focos son $F = (5, 0)$ y $F' = (-5, 0)$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,2$.

Las asíntotas son las rectas $r \equiv y = \frac{3}{4}x$ y $r' \equiv y = -\frac{3}{4}x$

b) La parábola pedida pasa por los puntos $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$ y debe tener ecuación $x = py^2 + qy + r$. Para calcular los tres coeficientes p, q y r sustituimos los puntos A', B y B' en la ecuación y se obtiene un sistema, que resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{l} -4 = r \\ 0 = 9p + 3q + r \\ 0 = 9p - 3q + r \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} r = -4 \\ 9p + 3r = 4 \\ 9p - 3r = 4 \end{array}\right| \; 6r = 0 \Rightarrow r = 0;\ \ 9p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{9}; \left\{\begin{array}{l} p = \frac{4}{9} \\ q = 0 \\ r = -4 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ La ecuación de la parábola es $x = \frac{4}{9}y^2 - 4$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

a) Para calcular las abscisas de los puntos de inflexión igualamos a cero la derivada segunda y resolvemos la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{8x^2 - 2(x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}; f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

La solución $x = -1$ no es válida por no ser positiva, así que hay que comprobar si en $x = 1$ hay un punto de inflexión:

$$f'''(x) = \frac{12x(x^2+3)^3 - (6x^2-6)3(x^2+3)^2 2x}{(x^2+3)^6} \Rightarrow f'''(1) \neq 0$$

Luego f tiene un punto de inflexión en $x = 1$; el valor de la ordenada es $y = f(1) = \frac{1}{4}$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

La recta pendiente tiene ecuación $t \equiv y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Rightarrow t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

Solución — La recta tangente pedida tiene ecuación $t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

b) La recta t y la gráfica de f se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + 1}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,01020$$

Solución — El área pedida es 0,01020 u^2

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad ; \quad y = -1 + 2t \quad ; \quad z = t$$

y es perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z = 2$

La recta r pasa por el punto $A = (1, -1, 0)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

El plano pedido debe pasar por el punto A y tener como vectores generadores $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3(x-1)+3(y+1)-3z = -3x+3y-3z+6 = 0 \Rightarrow x-y+z-2 = 0$$

Solución El plano pedido tiene ecuación $x - y + z - 2 = 0$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices *consecutivos* de un paralelogramo. Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

a) $D = C + \overrightarrow{BA} = (1,3,3) + (-1,-1,-1) = (0,2,2)$

El área del paralelogramo será:

$$\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = |(-1,-1,-1) \times (-1,1,1)| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(0,2,-2)| = \sqrt{8} = 2,828$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El vértice $D = (0,2,2)$ y la superficie del paralelogramo es $2,828u^2$

b) Calculamos la longitud de dos lados que se cortan:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}; \overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = |(-1,1,1)| = \sqrt{3}$$

Como los cuatro lados son iguales, el paralelogramo es un rombo.

Vemos si dos lados que se cortan son perpendiculares o no:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (1,1,1) \cdot (-1,1,1) = -1+1+1 = 1 \neq 0$$

Como los lados que se cortan no son perpendiculares, el paralelogramo no es un rectángulo.

$\boxed{\text{Solución}}$ El paralelogramo es un rombo y no es un rectángulo.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 2 \\ ax+y+2z & = & 0 \\ x-y+az & = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=-1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a=2$.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$

$\text{rg}(A) \geqslant 2$ ya que tiene un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Estudiamos cuándo puede ser $\text{rg}(A)=3$ resolviendo la ecuación $\det(A)=0$

$$\det(A) = a-2+2+a^2 = a^2+a = 0 \Rightarrow a = \left\{\begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array}\right.$$

Caso $a \neq 0$ y $a \neq -1$. En este caso $\text{rg}(A)=3$, luego también $\text{rg}(A^*)=3$, así que el sistema es no homogéneo, compatible determinado.

Caso $a=0$. En este caso $\text{rg}(A)=2$ y vemos si el menor de orden 2 de A se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2+4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

En este caso el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso $a=-1$. En este caso $\text{rg}(A)=2$ y vemos si el menor de orden 2 de A se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2+4 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

En este caso el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado

b) Para $a=-1$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando y y z en función de x.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -y & & = & -x+2 \\ y & +2z & = & x \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} y=x-2 \\ 2z=2 \Rightarrow z=1 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \\ z=1 \end{array}\right.$

c) Para $a=2$ el sistema es de Cramer y $\det(A)=2^2+2=6$; lo resolvemos usando la regla de Cramer.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2+4=6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2-8=-6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-4-2+2=-3 \Rightarrow x = \frac{\Delta_z}{\det(A)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & \text{si} \quad x \geq -1 \\[2ex] \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ ya que en 0 se anula un denominador.

f es continua en los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$ ya que en cada uno de ellos es una función cociente de funciones continuas en las que no se anula el denominador.

En el punto 0 la función es discontinua porque $0 \notin D(f)$.

Para estudiar la continuidad en -1 hay que recurrir a la definición de continuidad en un punto verificando si se cumplen las tres condiciones:

Primera condición: $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1}{-1} = 1$.

Segunda condición:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1 \\[3ex] \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1$$

Tercera condición: $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Se cumplen las tres condiciones, luego f es continua en el punto -1

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ y f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

b) Asíntota vertical solo puede tener en el punto de discontinuidad, el 0. Calculamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x} = -\infty \\[3ex] \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La recta } x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Calculamos el comportamiento cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$

f no tiene asíntotal horizontal por la derecha.

Si tuviera asíntota oblicua, tendría ecuación $y = mx + n$. Intentamos calcular m y n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

La recta de ecuación $y = x + 3$ es asíntota oblicua por la derecha.

Calculamos el comportamiento cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

La recta de ecuación $y = 2$ es asíntota horizontal por la izquierda.

Solución La gráfica de f tiene tres asíntotas: $x = 0$, $y = x + 3$ e $y = 2$.

c) Vemos si la gráfica de f corta al eje $y = 0$ en algún punto entre 1 y 2:

$$\frac{x^2+3x+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2+3x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin [1,2]$$

Como no corta, el área pedida es

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left. \frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}2^2 + 3\cdot 2 + \ln 2 - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = 4.5 + \ln 2 = 5.193$$

Solución El área pedida es $5.193u^2$