PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-ay &=& 2 \\ ax-y &=& a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y=2$.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right)$

Estudiamos cuándo puede ser $\mathrm{rg}(A)=2$ resolviendo la ecuación $\det(A)=0$

$$\det(A) = -1+a^2 = 0 \Rightarrow a = \left\{\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right.$$

Si $a=-1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ y $\mathrm{rg}(A)=1$ y $\mathrm{rg}(A^*)=2$, luego el sistema es incompatible.

Si $a=1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ y $\mathrm{rg}(A)=1$ y $\mathrm{rg}(A^*)=1$, luego el sistema es no homogéneo, compatible e indeterminado.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ entonces $\det(A) \neq 0$ y por tanto $\mathrm{rg}(A)=2$ y $\mathrm{rg}(A^*)=2$, con lo que el sistema es no homogéneo compatible determinado.

El sistema tiene solución única cuando $a \neq -1$ y $a \neq 1$. En ese caso el sistema es de Cramer y se puede resolver mediante la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{cc} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{array}\right| = -2+a^2+a \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{a^2+a-2}{a^2-1} = \frac{(a+2)(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+2}{a-1}$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{array}\right| = a+1-2a = 1-a \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

La solución del sistema es $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a+2}{a-1} \\ \\ y = \dfrac{1}{a-1} \end{array}\right.$

b) Si $a = 1$ el sistema es equivalente a $\{x - y = 2$, que tiene infinitas soluciones.

Una de ellas es $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, $y = \dfrac{1}{a-1} \Rightarrow \dfrac{1}{a-1} = 2 \Rightarrow 1 = 2a - 2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad a = 1$ y $a = \dfrac{3}{2}$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 3 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

a) Encontramos dos puntos de la recta r:

$$y = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow P_r = (2, 0, 1) \in r$$

$$y = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a + 2 \\ z = 1 - a \end{array} \right. \Rightarrow Q_r = (a + 2, 1, 1 - a) \in r$$

A partir del vector que une dos puntos de r obtenemos el vector de dirección:

$$\overrightarrow{P_rQ_r} = (a, 1, -a) \Rightarrow \vec{v}_r = (a, 1, -a)$$

Encontramos dos puntos de la recta s:

$$z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array} \right. \Rightarrow P_s = (1, 3, 0) \in s$$

$$z = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow Q_s = (0, 4, -1) \in s$$

A partir del vector que une dos puntos de s obtenemos el vector de dirección:

$$\overrightarrow{P_sQ_s} = (-1, 1, -1) \Rightarrow \vec{v}_s = (-1, 1, -1)$$

Para que los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ sean proporcionales debe ocurrir

$$\frac{a}{-1} = \frac{1}{1} = \frac{-a}{-1} \Rightarrow -a = 1 = a \rightarrow \text{imposible.}$$

Como los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ nunca son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan. Para distinguir los dos casos, resolvemos la ecuación $[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0$:

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \left| \begin{array}{rrr} 1 & -3 & 1 \\ a & 1 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right| = -1 - 3a + a + 1 + a - 3a = -4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ Si $a = 0$, son secantes; si $a \neq 0$, se cruzan.

b) Si $a = 1$, las rectas se cortan y por tanto $d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 2, 2)$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-4 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = 1.414$$

Solución $\quad 1.414\, u$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 2 puntos.

Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x - x^2) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{e^x}\right) = \infty,$ ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El límite es ∞

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x} + \frac{6^x}{6^x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1} = \dfrac{0+0}{0+1} = 0$

$\boxed{\text{Solución}}$ El límite es 0

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 2 puntos.

> Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:
>
> $$f(x) = x(\ln(x))^2$$
>
> siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$$f(x) = x(\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x) = (\ln(x))^2 + x2\ln(x)\frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x)+2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow x = e^{-2} \end{array} \right. \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ e^{-2} \end{array} \right.$$

Usando f'' estudiamos las soluciones obtenidas:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \Rightarrow f''(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x)+1)$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = 1$$
$$f''(e^{-2}) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } x = e^{-2}$$

Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}(\ln(x)+1) = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Usando f''' estudiamos la solución obtenida:

$$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln(x)+1) \Rightarrow f'''(x) = -\frac{2}{x^2}(\ln(x)+1) + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'''(e^{-1}) \neq 0 \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } x = e^{-1}$$

Solución

f tiene un mínimo relativo en 1, un máximo relativo en e^{-2} y un punto de inflexión en e^{-1}

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 3 puntos.

Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

a) $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 1 = 10$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\det(A_2) = 10$

b) $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 100$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\det(A_3) = 100$

c) $\det(A_5) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10000$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\det(A_5) = 10000$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 3 puntos.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

a) Como $f(x)$ no se anula en el intervalo [0,1], el área pedida es $\int_0^1 f$:

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = \frac{c}{5}x^5 + \frac{1}{3c}x^3 + x \Big]_0^1 = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El área es $\frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$

b) Llamamos $A(c) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$ y resolvemos la ecuación $A'(c) = 0$:

$$A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2};\ A'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \Rightarrow 5 = 3c^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Como el enunciado pide $c > 0$, solo estudiamos con A'' la solución positiva:

$$A''(c) = \frac{2}{3c^3} \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) > 0 \Rightarrow A \text{ tiene un mínimo en } c = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.291$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $c = 1.291$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 2 puntos.

Dados los puntos $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,-1)$, $C=(0,1,-2)$ y $D=(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π.

a) Si el producto mixto $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$ es distinto de cero, los puntos no son coplanarios:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=[(1,0,-1),(0,1,-2),(1,2,0)]=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\1&2&0\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0$$

b) El plano π pasa por el punto A y está generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&-1\\0&1&-2\end{vmatrix}=x+2y+z\Rightarrow \pi\equiv x+2y+z=0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad \pi\equiv x+2y+z=0$

c) $d(D,\pi)=\dfrac{|1+2\cdot 2+0|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}=2.041$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad d(D,\pi)=2.041\,u$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.
Opción B. Ejercicio 4. Valor: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos). Hallar el punto Q intersección de π y r.

c) (0,5 puntos). Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo PQR.

a) El vector normal de π es el vector de dirección de la recta r.

$$\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 2, -1).$$

Con el vector de dirección de la recta y el punto por el que pasa se obtienen las ecuaciones paramétricas.

Solución $\quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

b) Sustituimos las coordenadas de un punto de r en la ecuación de π para calcular el valor de λ que corresponde al punto Q:

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituimos en la ecuación de r el valor obtenido de λ: $Q = (-2, 0, 4)$

Solución $\quad Q = (-2, 0, 4)$

c) Las ecuaciones implícitas del eje OY son $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Para hallar el punto R resolvemos el sistema formado por las ecuaciones del eje OY y del plano π:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 10 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (0, -5, 0)$$

Solución $\quad R = (0, -5, 0)$

d) El área pedida es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$

$$\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (13, -10, 19)$$

$$A = \frac{1}{2}|(13, -10, 19)| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + (-10)^2 + 19^2} = 12.55$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $A = 12.55\, u^2$