

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^2 - x - 6$.

Calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(b) **Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.**

(c) **El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **Las tres personas votan al candidato A.**

(b) **Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.**

(c) **Al menos una de las tres personas se abstiene.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los del tipo A y de 35 euros para los del tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcular sus asíntotas.
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio 3. (puntuación máxima: 2 puntos)

De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

- Tres reyes.
- Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
- Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

Ejercicio 4. (puntuación máxima: 2 puntos)

Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

Por Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E2 + E1} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E3 + E2} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Queda un sistema compatible indeterminado; haciendo $z = t$, la solución es:

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio 2

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

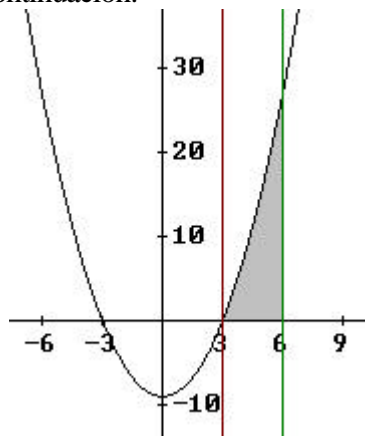
b) La función $g(x)$ es una parábola de eje vertical: tendrá un mínimo, pues el coeficiente de x^2 es positivo.

Por derivadas:

$$g(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

Como $g''(x) = 2 > 0$, en $x = 1/2$ se tiene un mínimo. Su valor es $g(1/2) = -25/4$

c) El recinto es el dibujado a continuación.



El área vale:

$$A = \int_3^6 (x^2 - 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_3^6 = 18 - (-18) = 36$$

Ejercicio 3

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,45, P(B) = 0,35, P(\text{Abstenerse}) = 0,20 \text{ y } P(\text{no abstenerse}) = 0,80.$$

Con esto:

- a) $P(\text{las tres personas votan al candidato A}) =$
 $= P(A \cap A \cap A) = 0,45 \cdot 0,45 \cdot 0,45 = 0,091125$
- b) $P(\text{Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B}) =$
 $= 3 \cdot P(A \cap A \cap B) = 3 \cdot 0,45 \cdot 0,45 \cdot 0,35 = 0,2126$
- c) $P(\text{Al menos una de las tres personas se abstiene}) =$
 $= 1 - P(\text{ninguna de las tres se abstiene}) = 1 - 0,80 \cdot 0,80 \cdot 0,80 = 0,488$

Ejercicio 4

El error admitido, E , viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional.

En nuestro caso, para una confianza del 99%, $Z_{\alpha/2} = 2,575$, $\sigma = 0,05$ y $E < 0,01$, se tendrá:

$$2,575 \frac{0,05}{\sqrt{n}} < 0,01 \Rightarrow \sqrt{n} > 12,875 \Rightarrow n > 165,77$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 166.