INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.
.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Calcular los valores de *a* para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

coincide con sus traspuesta.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sea considera la función $f(x) = xe^{x^2}$ **.**

(a) **Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f*(x) en el punto de abscisa x = 1.**
(b) **Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de *f*(x) para $x \geq 0$, el eje OX y la recta x = 2.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Un test para detectar una sustancia contaminante en agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0,99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0,05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0,99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Determinar los valores máximos y mínimos de la función $z = 5x + 3y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} &3x + y \geq 4 \\ &x + y \leq 6 \\ &0 \leq y \leq 5 \\ &x \leq 5 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$

Se pide:

(a) **Especificar su dominio de definición.**

(b) **Estudiar su continuidad.**

(c) **Calcular sus asíntotas si las hubiera.**

Ejercicio 3. (puntuación máxima: 2 puntos)

Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

Ejercicio 4. (puntuación máxima: 2 puntos)

Se ha extraído una muestra de 150 familias de residentes en un barrio obteniéndose que la renta familiar media de la misma asciende a 20000 euros. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros.

(a) **A partir de estos datos, calcular un intervalo de confianza para la renta familiar media con un nivel de confianza del 95%.**

(b) **¿Qué tamaño muestral mínimo es necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 90%, un error en la estimación de la renta familiar media no superior a ±142 euros?**

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

La traspuesta de A es $A^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$.

Como $A^t = A^{-1}$ se cumplirá que

$$A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & 16+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a^2+16}{25} = 1 \Rightarrow a = \pm 3$$

Ejercicio 2

(a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Si $\quad f(x) = xe^{x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

luego $f(1) = e$; $f'(1) = 3e$

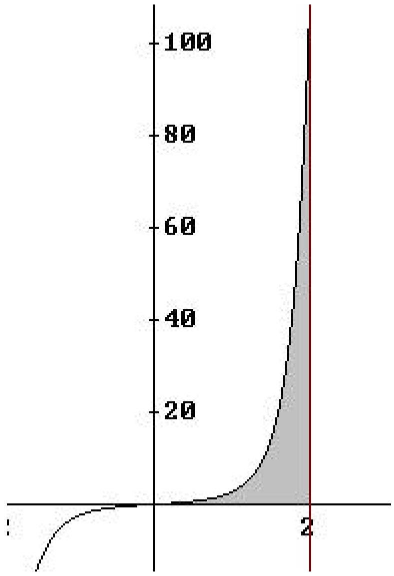
De donde la tangente será

$$y - e = 3e(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = 3ex - 2e$$

(b) Como la función es positiva en el intervalo considerado, el área pedida viene dada por el valor d la integral

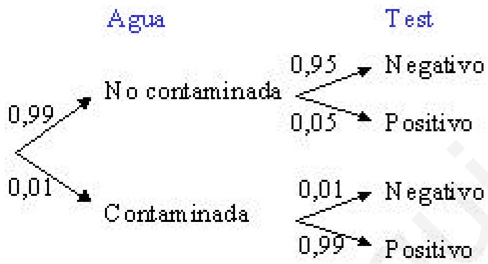
$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

NOTAS: 1. Esta integral es inmediata, no obstante podría hacerse el cambio $x^2 = t$.
2. Aunque no se pide, ni es necesario hacerlo, el recinto pedido es el sombreado el la siguiente figura:



Ejercicio 3

La situación puede describirse en el siguiente diagrama:



La probabilidad de que el test dé positivo es:

$$P(+) = P(\text{No contaminada}) \cdot P(+/\text{No contaminada}) + \\ + P(\text{Contaminada}) \cdot P(+/\text{Contaminada})$$

Luego, $P(+) = 0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 0{,}594$

Mientras que

$$P(\text{No contaminada}/+) =$$

$$= \frac{P(\text{No contaminad a}) \cdot P(+/\text{No contaminad a})}{P(+)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{0{,}0594} = 0{,}833$$

Esto significa que el 83,3 veces que el test detecta que el agua está contaminada, realmente no lo está. (Obviamente habría que *tirar* ese test.)

Ejercicio 4

El error admitido, *E*, viene dado por $E = Z_{a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional.

En nuestro caso, para una confianza del 95%, $Z_{a/2}$ = 1,96, σ = 5 y *E* < 3, pues la amplitud del intervalo $2\cdot Z_{a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

(Recuérdese que el intervalo de confianza es $\left(\overline{x} - Z_{a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + Z_{a/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$)

Con esto:

$$1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} < 3 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} > 9{,}8 \ \Rightarrow\ n > 96{,}04$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 97.