OPCIÓN A.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función *f* y el eje OX.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
En cierta población humana, la media muestral $\overline{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\overline{X}$ sea menor o igual que 75 es 0,58 y la de que $\overline{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de $\overline{X}$. (Tamaño muestral *n* = 100).

OPCIÓN B.

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Encontrar todas las matrices *X* cuadradas 2 × 2 que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los dos casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la curva de ecuación cartesiana: $y = x^2 + 8x$
Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana: $y = x + 8$**.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b) Determinar la probabilidad del suceso: *Obtener una cara en la moneda* y *un número par* en *el dado.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución N(μ, σ) con σ igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos *y* se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ.

SOLUCIÓN. OPCION A.

EJERCICIO 1

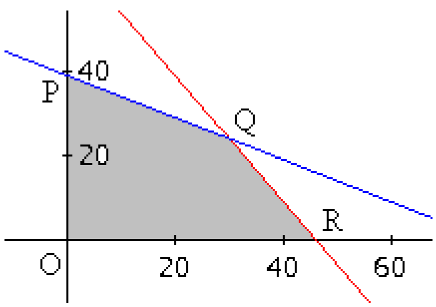
Se trata de un problema de programación lineal.
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	P reciclado	P normal	Ingresos
Lote A	x	x	3x	0,9x
Lote B	y	2y	2y	y
Disponibilidades		78 kg	138 kg	

El objetivo es maximizar los ingresos. Esto es:

Maximizar $I(x, y) = 0{,}9x + y$
restringido por: $x + 2y \leq 78$
$3x + 2y \leq 138$
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Los vértices son:

O = (0, 0), P = (0, 39),

Q: $\begin{cases} x + 2y = 78 \\ 3x + 2y = 138 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (30, 24) y R = (46, 0).

Como sabemos, los valores máximos y mínimos se encuentran en alguno de esos vértices.

Los ingresos para cada una de esas soluciones son:

En O, I(0, 0) = 0.
En P, I(0, 39) = 39
En Q, I(30, 24) = 5l.
En R, I(46, 0) = 41,4.

El máximo, que vale 51 €, se obtiene haciendo 30 lotes del tipo A y 24 del tipo B.

EJERCICIO 2

a) Derivando:

$$f(x) = x^3 - 9x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 9 \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x$$

Los posibles máximos o mínimos se dan en las soluciones de $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$.

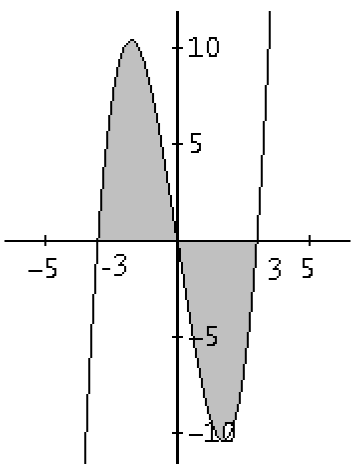
Como $f''(-\sqrt{3}) < 0$, en $x = -\sqrt{3}$ se tiene un máximo. El máximo es $\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$

Como $f''(\sqrt{3}) > 0$, en $x = \sqrt{3}$ se tiene un mínimo. El mínimo es $\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$

b) La gráfica corta al eje OX en las soluciones de

$$f(x) = x^3 - 9x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 9) = 0 \;\Rightarrow\; \text{x = –3; x = 0; x = 3}$$

Además la curva es simétrica (impar) respecto del origen. Dando algún valor más puede verse que su gráfica es la siguiente.



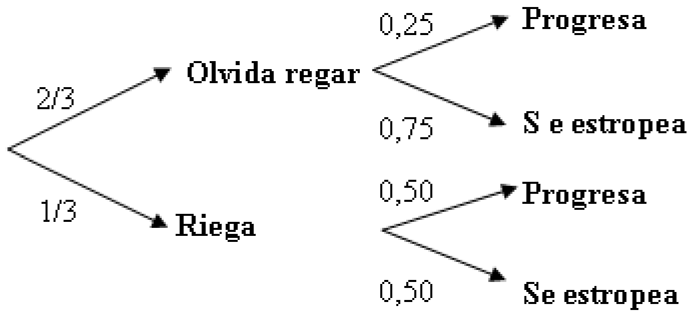
En consecuencia, el área pedida es:

$$\int_{-3}^{0}(x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3}(x^3 - 9x)dx =$$

$$= 2\int_{-3}^{0}(x^3 - 9x)dx = \left[2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\right]_{-3}^{0} = \frac{81}{2}$$

EJERCICIO 3

La situación puede concretarse en el siguiente diagrama de árbol.



La probabilidad de que el jardín se estropee, E, es:

P(E) = P(Olvida regar) · P(E/olvida regar) + P(Riega) · P(E/Riega) =
= 2/3 · 0,75 + 1/3 · 0,50 = 2/3

Si se ha estropeado, la probabilidad de que se olvidara regar, P(Olvidara/E), es

$$\text{P(Olvidara/E)} = \frac{P(Olvide)\cdot P(E/Olvida)}{P(E)} = \frac{(2/3)\cdot 0{,}75}{2/3} = 0{,}75$$

EJERCICIO 4

Las muestras de media $\overline{X}$ y desviación típica σ se distribuyen según la normal de media $\overline{X}$ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica de la población y *n* el tamaño muestral.

Esta distribución se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}$, que para *n* = 100 es $Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma/10}$.

Con esto, a partir de los datos, y con ayuda de la tabla normal, se tiene:

$$P(\overline{X} < 75) = 0{,}58 \Rightarrow P\left(Z < \frac{75 - \overline{X}}{\sigma/10}\right) = 0{,}58 \Rightarrow \frac{75 - \overline{X}}{\sigma/10} = 0{,}20$$

$$P(\overline{X} > 80) = 0{,}04 \Rightarrow P\left(Z > \frac{80 - \overline{X}}{\sigma/10}\right) = 0{,}04 \Rightarrow \frac{80 - \overline{X}}{\sigma/10} = 1{,}75$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{75 - \overline{X}}{\sigma/10} = 0{,}20; \qquad \frac{80 - \overline{X}}{\sigma/10} = 1{,}75$$

se obtiene: $\overline{X}$ = 74,35 y σ = 32,26.
Por tanto la desviación típica de la variable $\overline{X}$ es 3,226.