

OPCIÓN A

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Discutir el sistema para los distintos valores de k .
- Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

La función

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

- Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
- Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En una encuesta se pregunta a 10000 personas cuántos libros leen al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

- Hallar un intervalo de confianza al 80% para la media poblacional.
- Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

OPCIÓN B

1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envase proporciona el mínimo gasto de almacenaje?

2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde esta corta al eje de ordenadas.

(b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 4$.

3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: “Obtener tres unos”, “Obtener al menos un dos”, “Obtener tres números distintos” y “Obtener una suma de 4”.

4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Para una población $N(\mu, \sigma = 25)$, ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0,95?

RESPUESTA

Opción A

Ejercicio 1

(a) Al tratarse de un sistema homogéneo siempre será compatible: determinado, con solución única, $x = y = z = 0$ cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0; indeterminado, con infinitas soluciones, cuando ese determinante valga 0.

$$\text{El determinante de la matriz de coeficientes es } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7k + 56.$$

Valdrá 0 si $k = -8$. Será distinto de 0 cuando $k \neq -8$.

En consecuencia:

- Si $k \neq -8$ el sistema será compatible determinado.
- Si $k = -8$, será compatible indeterminado.

(b) Si $k \neq -8$, como ya hemos dicho, la única solución es la trivial.

Si $k = -8$ el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{puede verse que } E3 = 2E1 + E2) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -z \\ x + 8y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -z \\ -2x - 16y = -6z \end{cases} \Rightarrow (\text{sumando})$$
$$\Rightarrow -19y = -7z \Rightarrow y = \frac{7}{19}z \Rightarrow x = \frac{1}{19}z$$

Llamando $z = 19t$ se tendrá:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 19t \end{cases}$$

Ejercicio 2

El beneficio máximo se obtiene en las soluciones de $B'(x) = 0$ que hacen negativa a $B''(x)$.

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} = -x + 9 - \frac{16}{x} \Rightarrow B'(x) = -1 + \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

(La solución $x = -4$ hay que descartarla.)

Como $B''(x) = -\frac{32}{x^3}$, para $x = 4$, $B''(4) = -1/2 < 0$ (máximo). (Para $x = -4$, $B''(-4) = 1/2 > 0$ (mínimo).)

El beneficio máximo se obtiene para $x = 4$, y vale $B(4) = \frac{-16 + 36 - 16}{4} = 1 \rightarrow 1000$ euros.

Ejercicio 3

Si llamamos R al huevo roto y B al bueno, en la caja hay 10 B y 2 R.

$$\text{a) } P(4 \text{ B}) = P(\text{BBBB}) = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$$

$$\text{b) } P(3 \text{ B y } 1 \text{ R}) = P(\text{BBBR, BBRB, BRBB, RBBB}) = 4 \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{33}$$

Ejercicio 4

(a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 5$, $\sigma = 2$, $n = 10000$ y, para el 80 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,28$.

$$\begin{aligned} \left(5 - 1,28 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}}, 5 + 1,28 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}} \right) &= (5 - 0,0256, 5 + 0,0256) = \\ &= (4,9744, 5,0256) \end{aligned}$$

(b) El error admitido, E , viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, y $E < 0,25$ se tendrá:

$$1,96 \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} > 15,68 \Rightarrow n \geq 15,68^2 = 245,8$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 246 personas.