SEPTIEMBRE 2007- 08

OPCIÓN A

1.A.- Dada la función: $f(x)=e^{-x}\left(x^2+1\right)$, se pide:

a) Dibujar la gráfica de **f,** estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas

b) Calcular: $\int_0^1 f(x)\,dx$

a)

Puntos de corte

$$Con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow e^{-x}\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \Rightarrow \forall x \notin \Re \\ x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \end{cases} \Rightarrow \nexists x \in \Re$$

$$Con\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow e^{-0}\left(0^2+1\right)=1$$

$$f'(x)=-e^{-x}\left(x^2+1\right)+2xe^{-x}=-e^{-x}\left(x^2+1-2x\right)=-e^{-x}(x-1)^2$$

Crecimiento y decrecimiento

$$Crece \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow (-1)e^{-x}(x-1)^2>0 \Rightarrow \begin{cases} -1>0 \Rightarrow \nexists x \in \Re \\ e^{-x}>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ (x-1)^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases} \Rightarrow Decreciente\ \forall x \in \Re$$

No hay máximos ni mínimos relativos

Puntos de inflexión

$$f''(x)=-\left[-e^{-x}(x-1)^2+2(x-1)e^{-x}\right]=\left[e^{-x}(x-1)^2-2(x-1)e^{-x}\right]=e^{-x}\left(x^2-2x+1-2x+2\right)$$

$$f''(x)=e^{-x}\left(x^2-4x+3\right) \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow e^{-x}\left(x^2-4x+3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}>0 \Rightarrow x \in \Re \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{2} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ inflexión \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \Rightarrow f(3)=e^{-3}\left(3^2+1\right)=\dfrac{10}{e^3} \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1 \Rightarrow f(1)=e^{-1}\left(1^2+1\right)=\dfrac{2}{e} \end{cases}$$

Asíntotas verticales

No tiene

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow Cuando\ x\to\infty \Rightarrow y=0$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to\infty} e^{x}\left[(-x)^2+1\right]=\lim_{x\to\infty} e^{x}\left(x^2+1\right)=\infty.\infty=\infty \Rightarrow Cuando\ x\to-\infty \Rightarrow No\ existe$$

asíntota vertical

Continuación del problema 1.A.-

$a)$*Continuación*

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\left(x^2+1\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{xe^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x+e^x x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x(1+x)}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x(1+x)+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x(2+x)}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow \textit{Cuando } x\to\infty\Rightarrow \textit{No existe}$$

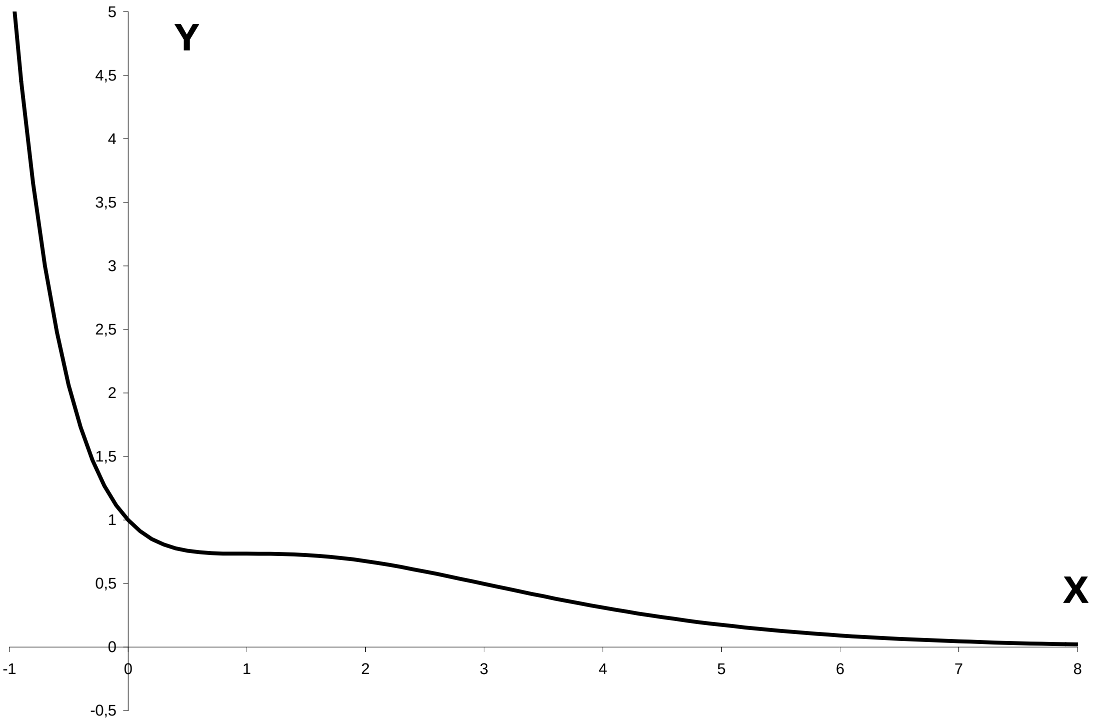
asíntota oblícua

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(x^2+1\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left[(-x)^2+1\right]}{-x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x 2x+e^x\left(x^2+1\right)}{1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(x^2+2x+1\right)}{1}=-\frac{\infty}{1}=-\infty\Rightarrow \textit{Cuando } x\to-\infty\Rightarrow \textit{No existe}$$

asíntota oblícua

Gráfica de la función



$b)$

$$I=\int e^{-x}\left(x^2+1\right)dx=-e^{-x}.\left(x^2+1\right)-\int -e^{-x}.2x\,dx=-e^{-x}.\left(x^2+1\right)+2\int e^{-x}x\,dx$$

$$\begin{cases} x^2+1=u\Rightarrow 2x\,dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int e^t dt=-e^t=-e^{-x}\end{cases}$$

$$I=-e^{-x}.\left(x^2+1\right)+2\int e^{-x}x\,dx=-e^{-x}.\left(x^2+1\right)+2\left(-xe^{-x}\right)-2\int -e^{-x}\,dx=-e^{-x}.\left(x^2+2x+1\right)-2e^{-x}$$

$$\begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int e^t dt=-e^t=-e^{-x}\end{cases}$$

$$I=-e^{-x}.\left(x^2+2x+3\right)+K$$

Continuación del problema 1.A.-

$b)Continuación$

$$\int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right)dx = -\left[e^{-x}.\left(x^2+2x+3\right)\right]_0^1 = -\left[e^{-1}.\left(1^2+2.1+3\right)-e^{-0}.\left(0^2-2.0+3\right)\right] = -\left(6.e^{-1}-3\right)$$

$$\int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right)dx = -6e^{-1}+3 = -\frac{6}{e}+3 = \frac{3e-6}{e}$$

2.A.- Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha+1 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar el rango de **A** según los valores del parámetro **a**
b) Decir cuando la matriz **A** es invertible. Calcular la inversa para **a = 1**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \alpha+1 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix}=2(\alpha+1)-2\alpha(\alpha+1)^2=2(\alpha+1)[1-\alpha(\alpha+1)]=2(\alpha+1)\left(-\alpha^2-\alpha+1\right)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow -2(\alpha+1)\left(\alpha^2+\alpha-1\right)=0\Rightarrow \begin{cases} \alpha+1=0\Rightarrow \alpha=-1 \\ \alpha^2+\alpha-1=0\Rightarrow \Delta=1+4=5\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall\alpha\in\Re-\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,-1\,,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}\Rightarrow rang(A)=3$$

$$Si\ \alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -\left(1+\sqrt{5}\right) & 0 \end{vmatrix}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=\frac{1-5}{2}=-2\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$$

$$Si\ \alpha=-1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=2$$

$$Si\ \alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1+\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-1+\sqrt{5}\right)=\frac{5-1}{2}=2\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$$

$b)$

$$\exists A^{-1}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)\Rightarrow \alpha=1\Rightarrow |A|=-2(1+1)\left(1^2+1-1\right)=-2.2.1=-4\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.A Dado los puntos **P(1 , 1 , 3) , Q(0 , 1 , 0)**, se pide

a) Hallar todos los puntos **R** tales que la distancia entre **P** y **R** sea igual a la distancia entre **Q** y **R**. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar todos los puntos **S** contenidos en la recta que pasa por **P** y **Q** que verifican **dist(P , S) = 2.dist(Q , S),** donde “dist” significa distancia

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (x\,,\,y\,,\,z) - (1\,,1\,,3) = (x-1\,,\,y-1\,,\,z-3) \\ \overrightarrow{QR} = (x\,,\,y\,,\,z) - (0\,,1\,,0) = (x\,,\,y-1\,,\,z) \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \pm\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 \Rightarrow -2x + 1 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 6z + 10 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3z + 5 = 0 \Rightarrow Es\ un\ plano$$

$b)$

$$\overrightarrow{PQ} = (0\,,1\,,0) - (1\,,1\,,3) = (-1\,,0\,,-3) \equiv (1\,,0\,,3) \Rightarrow s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow S(\lambda\,,1\,,3\lambda)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PS} = (\lambda\,,1\,,3\lambda) - (1\,,1\,,3) = (\lambda-1\,,0\,,3\lambda-3) \\ \overrightarrow{QR} = (\lambda\,,1\,,3\lambda) - (0\,,1\,,0) = (\lambda\,,0\,,3\lambda) \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PS}\right| = 2\left|\overrightarrow{QS}\right| \Rightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = \pm 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2}$$

$$(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4\left(\lambda^2 + 9\lambda^2\right) \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 40\lambda^2 \Rightarrow -30\lambda^2 - 20\lambda + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \lambda_2 = \dfrac{-2-4}{6} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow S_1 \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow S_1\left(\frac{1}{3}\,,1\,,1\right) \qquad \lambda = -1 \Rightarrow S_2 \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 3\cdot(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow S_1(-1\,,1\,,-3)$$

4.A.- Dado las rectas : $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$, $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$

Halla la ecuación de la recta **t** perpendicular común a ambas

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = [-1 + \lambda - 2\mu , 2 + 2\lambda - (1 + 3\mu) , 3\lambda - 4\mu] = (\lambda - 2\mu - 1 , 2\lambda - 3\mu + 1 , 3\lambda - 4\mu)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1 , 2 , 3) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_t} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} . \overrightarrow{v_t} = 0 \Rightarrow (1 , 2 , 3) \cdot (\lambda - 2\mu - 1 , 2\lambda - 3\mu + 1 , 3\lambda - 4\mu) = 0 \\ \overrightarrow{v_s} = (2 , 3 , 4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_t} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} . \overrightarrow{v_t} = 0 \Rightarrow (2 , 3 , 4) \cdot (\lambda - 2\mu - 1 , 2\lambda - 3\mu + 1 , 3\lambda - 4\mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu - 1 + 2.(2\lambda - 3\mu + 1) + 3.(3\lambda - 4\mu) = 0 \\ 2 \cdot (\lambda - 2\mu - 1) + 3.(2\lambda - 3\mu + 1) + 4.(3\lambda - 4\mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu - 1 + 4\lambda - 6\mu + 2 + 9\lambda - 12\mu = 0 \\ 2\lambda - 4\mu - 2 + 6\lambda - 9\mu + 3 + 12\lambda - 16\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda - 20\mu + 1 = 0 \\ 20\lambda - 29\mu + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 140\lambda - 200\mu + 10 = 0 \\ -140\lambda + 203\mu - 7 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 3\mu + 3 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow 14\lambda - 20(-1) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$14\lambda = -21 \Rightarrow \lambda = -\frac{21}{14} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \left[-1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) - 1 , 2(-1) - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) + 1 , 3(-1) - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left(-1 + 3 - 1 , -2 + \frac{9}{2} + 1 , -3 + 6 \right) = \left(1 , \frac{7}{2} , 3 \right) \equiv (2 , 7 , 6) \Rightarrow S \begin{cases} x = 2.(-1) = -2 \\ y = 1 + 3.(-1) = -2 \\ z = 4.(-1) = -4 \end{cases}$$

$$t \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = -2 + 7\alpha \\ z = -4 + 6\mu \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.B a) Calcular $\int x^3 \ln(x)\, dx$ donde ln (x) es el logaritmo neperiano de x.

b) Utilizar el cambio de variable **x = e^t – e^{-t}** para calcular $\int \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar: $t = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

a)

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot \ln(x) - \int \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\int x^3\cdot dx = \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4 + K$$

$$Por\ \ partes\begin{cases} \ln(x) = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ x^3 dx = dv \Rightarrow v = \int x^3\ dx = \dfrac{1}{4}\cdot x^4 \end{cases}$$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot\left[\ln(x) - \frac{1}{4}\right] + K$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}}\, dt = \int \frac{e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\, dt = \int dt = t = \xrightarrow{Por\ indicación\ del\ problema} = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) + K$$

$$\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \Rightarrow dx = \left[e^t - (-1)e^{-t}\right]dt = \left(e^t + e^{-t}\right)dt \\ 4+x^2 = 4 + \left(e^t - e^{-t}\right)^2 = 4 + e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t} = 4 + e^{2t} - 2e^0 + e^{-2t} = e^{2t} + 2 + e^{-2t} = \left(e^t + e^{-t}\right)^2 \end{cases}$$

Veamos como se despeja t (aunque no haga falta)

$$x = e^t - \frac{1}{e^t} \Rightarrow xe^t = e^{2t} - 1 \Rightarrow e^{2t} - xe^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = u \Rightarrow u^2 - xu - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = x^2 + 4 \Rightarrow$$

$$u = \frac{x \pm \sqrt{x^2+4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} e^t = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \Rightarrow t.\ln(e) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) \Rightarrow t = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) \\ e^t = \dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \Rightarrow t.\ln(e) = \ln\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right) \Rightarrow t = \ln\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right) \end{cases}$$

2.B.- Dado el plano **$p_1 \equiv x + y + z = 1$** y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-4}$, se pide:

a) Hallar el punto **P** determinado por la intersección de **r** con **p_1**.

b) Hallar un plano **p_2** paralelo a **p_1** y tal que el segmento de la recta **r** comprendido entre los planos **p_1, p_2** tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades

$a)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \Rightarrow Inter\sec ción\ con\ \pi_1 \Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x = 1 + 2.1 = 3 \\ y = -1 + 3.1 = 2 \Rightarrow P(3\ ,\ 2\ ,\ -4) \\ z = -4.1 = -4 \end{cases}$$

b) Al ser paralelos tendrán el mismo vector director y el que nos piden tendrá un punto Q, intersección con la recta r que distará de P el valor dado, o sea el módulo del vector PQ es $\sqrt{29}$

$a)$

$$Ecuación\ de\ \pi_2 \Rightarrow x + y + z + D = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \Rightarrow Inter\sec ción\ con\ \pi_2 \Rightarrow 1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda + D = 0 \Rightarrow \lambda + D = 0 \Rightarrow \lambda = -D \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$Q \begin{cases} x = 1 + 2.D \\ y = -1 + 3.D \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1 + 2D\ ,\ -1 + 3D\ ,\ -4D) - (3\ ,\ 2\ ,\ -4) = (-2 + 2D\ ,\ -3 + 3D\ ,\ -4D + 4) \Rightarrow \\ z = -4.D \end{cases}$$

$$\sqrt{(-2 + 2D)^2 + (-3 + 3D)^2 + (-4 + 4D)^2} = \pm\sqrt{29} \Rightarrow (-2 + 2D)^2 + (-3 + 3D)^2 + (-4 + 4D)^2 = 29$$

$$4 - 8D + 4D^2 + 9 - 18D + 9D^2 + 16 - 32D + 16D^2 = 29 \Rightarrow 29D^2 - 58D + 29 = 29 \Rightarrow$$

$$29D^2 - 58D = 0 \Rightarrow D^2 - 2D = 0 \Rightarrow D(D - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D - 2 = 0 \Rightarrow D = 2 \end{cases}$$

$$Dos\ planos\ cumplen\ la\ condición \begin{cases} \pi_{2a} \equiv x + y + z = 0 \Rightarrow Q_a \begin{cases} x = 1 + 2.0 = 1 \\ y = -1 + 3.0 = -1 \\ z = -4.0 = 0 \end{cases} \\ \pi_{2b} \equiv x + y + z + 2 = 0 \Rightarrow Q_b \begin{cases} x = 1 + 2.2 = 5 \\ y = -1 + 3.2 = 5 \\ z = -4.2 = -8 \end{cases} \end{cases}$$

3.B.- Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x-2y+z-3v=-4 \\ x+2y+z-3v=4 \\ 2x-4y+2z-6v=-8 \\ 2x+2z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Compatible\ Indeterminado$$

$6v=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow 4y=8 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x-2.2+z-0=-4 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z \Rightarrow$
$Solución(-\lambda\ ,\ 2\ ,\ \lambda\ ,\ 0)$

4.B.- El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor disponible, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Llamando **C** al número de Billetes de 50 euros, **V** a los de 20 euros y **D** a los de 10 euros

$$\begin{cases} C+V+D=225 \\ 50C+20V+10D=7000 \\ C+D=2.V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C+V+D=225 \\ 5C+2V+D=700 \\ C-2V+D=0 \end{cases}$$

Por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 3 & 4 & 425 \\ 0 & 0 & 4 & 200 \end{array}\right) \Rightarrow 4D=200 \Rightarrow D=\frac{200}{4}=50 \textit{ billetes de } 10\ €$$

$$3V+4.50=425 \Rightarrow 3V=425-200 \Rightarrow 3V=225 \Rightarrow V=\frac{225}{3}=75 \textit{ billetes de } 20\ € \Rightarrow$$

$$C+75+50=225 \Rightarrow C=225-125=100 \textit{ billetes de } 50\ €$$

$$\textit{Solución}(100\ ,\ 75\ ,\ 50)$$